Cara Mudah Memahami

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

EDISI KEENAM

Nata Wirawan

Cara Mudah Memahami

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

EDISI KEENAM

Penerbit
Keraras Emas

Cara Mudah Memahami
MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Edisi Keenam, Agustus 2017

Penulis : Nata Wirawan

Penerbit : Keraras Emas
Denpasar

ISBN : 978-602-6896-12-4

Cara Mudah Memahami

MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS

Edisi Keenam

Oleh
Nata Wirawan
Universitas Udayana

Penerbit
Keraras Emas
Jl. Padma No. 107
Denpasar (80238), Bali

Sebagai seorang manusia,
guru utamaku adalah alam di sekitarku.
dan
Sebagai seorang dosen,
guru utamaku adalah mahasiswaku.

(Nata Wirawan, 2012)

PRAKATA EDISI KEENAM

Dalam edisi keenam buku ini, penulis melakukan penyesuaian judul buku, dari judul semula " Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi" menjadi "Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi dan Bisnis". Seperti edisi sebelumnya, edisi keenam Cara Mudah Memahami **Matematika Ekonomi dan Bisnis**, dimaksudkan sebagai buku pengantar bagi mahasiswa ekonomi dan bisnis dan pemakai lainnya yang sungguh-sungguh berminat mempelajari dan mendalami metematika ekonomi dan bisnis yang merupakan terapan matematika dalam ekonomi dan bisnis.

Sejak pertama kali diterbitkannya, buku ini banyak diminati dan digunakan oleh para mahasiswa ekonomi dan bisnis maupun pengajar. Saran- saran dan koreksi dari mereka mengenai edisi-edisi sebelumnya dan edisi ini, menjadikan buku ini lebih baik.

Terdapat beberapa alasan buku ini disusun atau ditulis. **Pertama**, ikut serta menambah jumlah referensi buku matematika ekonomi dan bisnis dalam bahasa Indonesia. K**edua,** belum banyak buku matematika ekonomi dan bisnis dalam bahasa Indonesia yang dilengkapi dan diperkaya dengan contoh/contoh soal dan soal-soal latihan sedemikian banyak dan bervariasi. **Ketiga**, membantu dan memudahkan penulis dalam mengantarkan mata kuliah ini di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Udayana. K**eempat**, membantu mahasiswa belajar lebih mudah dan efisien serta mandiri.

Dalam edisi ini, penulis melakukan perubahan yang berarti dengan adanya penambahan satu pokok bahasan yaitu fungsi multivariabel dan aplikasinya dalam ekonomi dan bisnis (Bab 12). Dengan demikian edisi ini terdiri atas 12 bab, seperti tercantum dalam daftar isi. Selain penambahan bab, juga dilakukan koreksi atas beberapa kekurangan dan kesalahan yang terdapat dalam edisi 5. Sementara itu, cara penyajian materi dalam edisi ini tetap dipertahankan seperti dalam edisi sebelumnya.

Sasaran yang ingin dicapai adalah hasil perkuliahan yang optimal, terutama dalam mata kuliah ini. Sementara keunggulan buku ini dari buku sejenis lainnya adalah – buku ini disajikan dalam bentuk yang sederhana, ringkas, padat isi dan sistematis – serta dilengkapi dengan 224 contoh/ contoh soal dan 152 soal-soal latihan yang sebagian besar merupakan terapan dalam ekonomi dan bisnis. Oleh karena materi yang terkandung dalam buku ini untuk satu semester, maka disarankan kepada kolega dosen, agar materi Bab 2 sampai dengan Bab 6 diberikan sebagai bahan Ujian Tengah Semester dan sisanya, yaitu materi Bab 7 sampai dengan Bab 12 sebagai bahan Ujian Akhir Semester.

Edisi keenam Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi dan Bisnis ini, sesungguhnya merupakan hasil dari usaha banyak orang. Para mahasiswa, rekan sejawat (kolega dosen), pemeriksa, dan penerbit semuanya memiliki kontribusi yang cukup besar.

Penulis ingin mengungkapkan rasa terima kasih kepada rekan sejawat – kolega dosen – yang telah memberikan berbagai saran dan masukan dalam penyusunan edisi-edisi sebelumnya dan naskah edisi ini, yaitu kolega dosen/pengajar di :

Universitas Udayana
Aswitari, L.P.
Yuliarmi, Ni N.
Saskara, I A. N.
Sudarsana Arka
Jayastra, I K.
Jember, I Md.
Indrajaya, I G.B.
Purbadharmaja, I B.P.
Wita Kesumajaya, W.
Widanta, A.A.B
Sukadana, W.
Dwi Setyadhi Mustika, Md.
Ayuningsasi, A.A.
Karmini, Ni L.
Tisnawati, Ni Md.
Santika, W
Vivi Lestari, P.
Ayu Desi Indrawati
Surya Dewi Rustaryuni
Wulandari Kusumadewi, Md.

Universitras Warmadewa
Pulawan, I Md.
Suyatna Yasa, I P. Ngr.
Niti Widari, D.A
Sri Purnami, A.A.
Pertamawati, Ni P.

Universitas Hindu Indonesia
Kawiana, Gd. P.
Sumadi Ni K.
Israil Sitepu

Universitas Tabanan
Rastana, D.M.
Terimajaya, I W.

STIMI Handayani
Swaputra, I. B.
Gunastri, Md.
Mertha, W.

Universitas Pendidikan Ganesha
Bagia, I W.
Dwita Atmaja, Md.
Anjuman Zukhri
Fridayana Yudiatmaja
Lucy Sri Musmini
M.Rudi Irwansyah
Wisardja, I W
Yulianthini, Ni N.
Sukma Kurniawan, P.
Aritia Prayudi, Md

Universitas Mataram
Karismawan, P.
Akhmad Jupri
Endang Astuti
Satarudin
Emilia Septiani

Universitas Negeri Jakarta
Tuty Sariwulan, R.

Universitas Pendidikan Nasional
Eratodi, I G. B.
Suardana, K.
Wismantara, I G. Ngr

Universitas Mahasaraswati
Wana Pariartha, I W.
Suryani, Ni N.
Putru, I. B.
Lisa Ermawatiningsih, Ni P.
Yusi Pramandari, P
Manik Pratiwi, A. A.
Ika Prasetya Dewi, Md.
Utami Paramita, I. A. P.
Yuliastuti, I. A.

Universitas Panji Sakti
Sri Wati, P

Politenik Negeri Bali

Wijana, I Md
Putri Suardani, A.A
Dewinta Ayuni, Ni W.
Triyuni, Ni N.
Eka Armoni, Ni L.
Suja, I K.
Mas Krisna Komala Sari, I G. A.
Sadnyana Putra, I G. A.
Bagus Mataram, I G. A.
Putrana, I Wayan
Jemmy Waciko, K.

Secara khusus kepada Bapak Prof. Ketut Sudibia, dan Prof. Made Sukarsa dan Bapak Drs. Gede Djegog penulis mengucapkan banyak terima kasih atas bimbingan, saran dan dorongnya, sehingga edisi pertama buku ini dapat diterbitkan tahun 1994 yang lalu. Secara khusus pula kami berterima kasih kepada korektor naskah buku ini dan staf Penerbit Keraras Emas Denpasar yang menjadikan buku ini lebih sempurna dari edisi sebelumnya. Terima kasih yang tulus dan khusus disampaikan kepada Saudara Gde Aryantha Soethama atas kepiawaiannya dalam me- *lay out* isi dan mendisain kulit buku ini.

Akhirnya penulis menyadari buku ini jauh dari sempurna, tak ada gading yang tak retak, di atas langit ada langit lagi, oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun dari pembaca dan pemakai buku ini akan penulis terima dengan senang hati. Sementara itu, segala kekurangan dan kesalahan yang terdapat dalam buku ini sepenuhnya bersumber dan menjadi tanggung jawab penulis.

Denpasar, Agustus 2017

Nata Wirawan

PARAKATA EDISI KELIMA

Seperti edisi sebelumnya, edisi kelima Cara Mudah Memahami **Matematika Ekonomi** ini, dimaksudkan sebagai buku pengantar bagi mahasiswa ekonomi dan pemakai lainnya yang sungguh-sungguh berminat mempelajari dan mendalami metematika ekonomi yaitu penerapan matematika murni dalam ekonomi. Sejak pertama kali diterbitkannya, tahun 1994, buku ini banyak diminati dan digunakan oleh para mahasiswa ekonomi maupun pengajar. Saran- saran, koreksi dan ulasan mereka mengenai edisi-edisi sebelumnya dan edisi ini, menjadikan buku ini lebih baik.

Dalam edisi kelima ini, pokok bahasan dan cara penyajiannya tetap dipertahankan. Pokok bahasan terdiri atas 11 bab seperti yang tercantum dalam daftar isi. Perubahan nyata, dilakukan pada beberapa bab. Dalam Bab 1, terdapat penambahan sub pokok bahasan yaitu transposisi rumus, dan fungsi versus persamaan. Dalam Bab 4, terdapat penambahan sub pokok bahasan yaitu penentuan pendapatan nasional. Perubahan juga dilakukan dalam menyatakan rumusan atau model fungsi permintaan dan penawaran di dalam Bab 4, dan bab-bab lainnya yang berkaitan. Selain itu hampir di semua bab terjadi penyesuaian atau pemutakhiran soal, dan penambahan variasai soal.

Seperti telah penulis sampaikan pada edisi sebelumnya, adapun alasan disusunnya buku ini adalah: **pertama**, ikut serta menambah jumlah referensi buku matematika untuk mahasiswa ekonomi dalam bahasa Indonesia; **kedua,** belum banyak buku matematika ekonomi dalam bahasa Indonesia yang dilengkapi dan diperkaya dengan contoh/contoh soal dan soal-soal latihan serta variasinya yang begitu banyak. **ketiga**, membantu dan memudahkan penulis dalam mengantarkan mata kuliah ini di Fakultas Ekonomi dan Bisnis Universitas Udayana, dan yang **keempat**, membantu mahasiswa belajar lebih mudah dan efisien.

Sasaran yang ingin dicapai sudah barang tentu hasil perkuliahan yang optimal, terutama dalam mata kuliah ini. Sementara keunggulan buku ini dari buku sejenis lainnya adalah – buku ini disajikan dalam bentuk yang sederhana, ringkas, padat isi dan sistematis – serta disajikan dengan bahasa yang mudah dipahami. Selain itu, buku ini juga dilengkapi dengan 215 contoh/contoh soal dan 146 soal-soal latihan yang sebagian besar merupakan terapan dalam bidang ekonomi dan bisnis.

Oleh karena materi yang terkandung dalam buku ini untuk satu semester, maka disarankan kepada kolega dosen, agar materi Bab 1 sampai dengan Bab 6 diberikan sebagai bahan UTS (Ujian Tengah Semester). Sisanya, yaitu materi Bab 7 sampai dengan Bab 11 dipertimbangkan sebagai bahan UAS (Ujian Akhir Semester).

Edisi kelima Cara Mudah Memahami Matematika Ekonomi, sesungguhnya merupakan hasil dari usaha banyak orang. Para mahasiswa, rekan sejawat, pemeriksa, dan penerbit semuanya memiliki kontribusi yang cukup besar.

Penulis ingin mengungkapkan rasa terima kasih kepada rekan sejawat – kolega dosen – yang telah memberikan berbagai saran dan masukkan dalam penyusunan edisi-edisi sebelumnya dan naskah edisi ini, yaitu kolega dosen/pengajar di :

Universitas Udayana
Aswitari, L.P.
Yuliarmi, Ni Nym.
Saskara, I. A. N.
Jayastra, I K.
Purbadharmaja, I B. P.
Sudarsana Arka
Jember, Md
Widanta, A. A. B.
Indrajaya, I G. B
Yudi Setiawan, P.
Santika, I W.
Pande Dwiana Putra, I Md.
Tisnawati, Ni Md
Vivi Lestari, P.
Artha Wibawa, I Md.
Dwi Setyadhi Mustika, I Md.
Ayuningsasi, A. A.
Karmini, N. L.
Sukadana, I W.
Bayu Rahanatha, I Gd.
Ayu Desi Indrawati
Ica Rika Candraninggrat
Surya Negara Sudirman, I Md.
Wulandari Kusumadewi, Ni Md

Universitas Mahasaraswati
Wana Pariartha, I W.
Suryani, Ni Nym.
Putru, I. B.
Manik Pratiwi, A. A
Dian Putri Agustina, I Md.
Ika Prasetya Dewi, I Md.

Universitas Pendidikan Ganesha
Bagia, I W.
Dwita Atmaja, I Md.
Anjuman Zukhri
Fridayana Yudiatmaja
Lucy Sri Musmini
M. Rudi Irwansyah
Wisardja, I W.
Yulianthini, Ni Nym.
Sukma Kurniawan, P.
Aristia Prayudi, I Md.

Universitas Mataram
Karismawan, I P.
Akhmad Jupri
Endang Astuti
Satarudin
Emilia Septiani

Universitas Negeri Jakarta
R. Tuty Sariwulan

Universitas Warmadewa
Pulawan, I Md.
Niti Widari, D. A.
Suyatna Yasa, I. P. Ngr.
Sri Purnami, A.A.
Pertamawati, N. P.

Universitas Hindu Indonesia
Kawiana, Gd. P.
Sumadi, Ni Km.
Israil Sitepu

Politenik Negeri Bali
Wijana, I Md
Putri Suardani, A.A
Dewinta Ayuni, Ni W.
Triyuni, Ni Nym.
Wijaya, I Ngh
Eka Armoni, N.L.
Suja, I K.
Mas Krisna Komala Sari, I G. A.
Sadnyana Putra, I G.A.
Sumajaya, Gd
Bagus Mataram, I G. A
Putrana, I W.
Jimmy Waciko, Kd.
Tri Tanami Sukraini

Universitas Tabanan
Rastana, Dewa Md.

Universitas Panji Sakti
Sri Wati, P.

STIMI Handayani
Swaputra, I. B.
Tettie Setiyarti

Secara khusus kepada Bapak Prof. Ketut Sudibia, dan Prof. Made Sukarsa dan Bapak Drs. Gede Djegog penulis mengucapkan banyak terima kasih atas bimbingan, saran dan dorongnya, sehingga edisi pertama buku ini dapat diterbitkan tahun 1994 yang lalu. Secara khusus pula kami berterima kasih kepada korektor naskah buku ini – I N. Judarmita, I W. Karsana dan staf Penerbit Keraras Emas Denpasar – yang menjadikan buku ini lebih sempurna dari edisi sebelumnya. Terima kasih yang tulus dan khusus disampaikan kepada Saudara Gde Aryantha Soethama atas kepiawaiannya dalam me- *lay out* isi dan mendisain kulit buku ini.

Akhirnya penulis menyadari buku ini jauh dari sempurna, di atas langit ada langit lagi, oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun dari pembaca dan pemakai buku ini akan penulis terima dengan senang hati. Sementara segala kekurangan dan kesalahan yang terdapat dalam buku ini sepenuhnya bersumber dan menjadi tanggung jawab penulis.

Denpasar, Agustus 2014

NW

DAFTAR ISI

BAB 7 LIMIT FUNGSI

BAB 8 HITUNG DIFERENSIAL

BAB 9 APLIKASI TURUNAN FUNGSI DALAM EKONOMI DAN BISNIS

Bab 1 TEORI HIMPUNAN DAN SISTEM BILANGAN

1.1 Pengantar

Teori himpunan merupakan teori yang paling dasar bagi cabang ilmu matematika. Oleh karena itu, di bagian awal buku ini, teori mengenai himpunan kembali dipelajari untuk menyegarkan pengetahuan dan ingatan kita tentang himpunan yang telah dipelajari di SMU maupun di SMP dan bahkan di SD.

Disadari atau tidak, dalam kehidupan sehari-hari, sesungguhnya kita telah mengetahui dan banyak menerapkan konsep himpunan. Di masyarakat kita, para dokter menghimpun dirinya dalam sebuah wadah yang dinamakan IDI. Para sarjana ekonomi menghimpun dirinya dalam wadah yang dinamakan ISEI. Para penggemar motor besar menghimpun dirinya dalam wadah yang dinamakan IMBI. Para ibu rumah tangga telah mengatur dan meletakkan alat-alat dapur dalam satu wadah/tempat tertentu, demikian juga para siswa telah mengatur dan meletakkan alat tulis-menulis dalam wadah tertentu. Bahkan seorang pedagang ayam yang buta huruf pun telah mengelompokkan ayam dagangannya atas ayam betina dan ayam jantan. Itulah beberapa contoh mengenai himpunan dan bagaimana konsep himpunan telah kita laksanakan tanpa disadari.

Dalam analisa matematika, teori himpunan sering digunakan, seperti himpunan data observasi di lapangan, himpunan penyelesaian dari suatu model. Untuk membentuk suatu model ekonomi dan bisnis diperlukan data observasi di lapangan.

Tujuan bab ini. Untuk menyegarkan kembali ingatan dan pengetahuan peserta didik (mahasiswa) tentang teori himpunan dan sistem bilangan.

1.2 Definisi Himpunan

Himpunan adalah sekumpulan obyek, yang diberikan batasan serta dirumuskan secara tegas dan dapat dibedakan satu dengan yang lainnya. Tiap obyek, benda atau simbol yang secara kolektif membentuk suatu himpunan disebut elemen/unsur atau anggota dari himpunan tersebut.

1.3 Penulisan Suatu Himpunan

Himpunan dituliskan atau dinyatakan dengan notasi { } dan anggota-anggotanya ditulis di dalam kurung kurawal tersebut. Nama suatu himpunan ditulis dengan huruf kapital.

Ada dua (2) cara untuk menuliskan suatu himpunan.

Pertama : Cara tabulasi (*Roster Mathod*)
Cara tabulasi adalah suatu cara dengan mencantumkan seluruh obyek yang menjadi anggota suatu himpunan.

Kedua : Cara pencirian (*Rule Method*)
Cara pencirian adalah suatu cara dengan menyebutkan karakteristik tertentu dari obyek yang menjadi anggota himpunan tersebut.

Contoh 1-1

(a) A adalah himpunan semua jurusan di FEB Unud
Himpunan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut :
Pertama :
A = {EP, Manajemen, Akuntansi}
Kedua :
A = {x| x jurusan di FEB Unud}

(b) B adalah himpunan warna lampu lalu lintas
Himpunan B tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:
Pertama:
B = {Merah, Kuning, Hijau}
Kedua:
B = { x | x Warna lampu lalu lintas}

(c) C adalah himpunan nama hari dengan huruf depan S
Himpunan C tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :
Pertama :
C = {Senin, Selasa, Sabtu}
Kedua :
C = { x | x nama hari dengan huruf depan S}

Suatu elemen yang merupakan anggota/elemen dari suatu himpunan dinyatakan dengan notasi $\in$ (epsilon). Sedangkan untuk menyatakan **bukan anggota** dari suatu himpunan dinyatakan dengan notasi $\notin$.

Contoh 1- 2

(a) A = { x | x komoditi non - migas}
maka,

1 Kopi $\in$ A
2 Ikan tuna $\in$ A
3 Panili $\in$ A
4 Solar $\notin$ A

(b) B = {a, b, c, d}
maka ,

1 a $\in$ B
2 b $\in$ B
3 c $\in$ B
4 f $\notin$ B

1.4 Jenis Himpunan dan Diagram Venn

■ Himpunan berhingga dan tak berhingga

Himpunan berhingga ialah suatu himpunan yang jumlah anggotanya dapat dihitung. Sedangkan himpunan yang jumlah anggotanya tidak dapat dihitung disebut himpunan tak berhingga.

Contoh 1- 3

Himpunan berhingga,
B = {x | x Jurusan di FEB Unud}
B = {EP, Manajemen, Akuntansi}

Himpunan tak berhingga,
P = {x | x Bilangan Asli}
P = {1, 2, 3, 4 ...}

■ Himpunan kosong

Himpunan kosong adalah himpunan yang tidak memiliki anggota.
Notasinya ϕ atau { }.

Contoh 1- 4

A = {x | x Mahasiswa FEB Unud yang berumur 6 tahun}
B = {y | y Manusia yang berkepala tiga}

■ Himpunan semesta dan himpunan bagian

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua obyek atau elemen yang menjadi perhatian kita.
Notasinya : U atau S

Himpunan bagian

Himpunan A merupakan himpunan bagian dari B jika dipenuhi dua syarat yaitu :
(1) Setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B
(2) Paling tidak ada sebuah anggota himpunan B yang bukan merupa-kan

anggota himpunan A
Notasinya : $\subset$

Contoh 1- 5
S = {x | x mahasiswa Unud}
A = {y | y mahasiswa FEB Unud}
B = {z | z mahasiswa jurusan akuntansi FEB Unud}

Di sini, himpunan S merupakan himpunan semesta sedangkan himpunan A dan himpunan B, merupakan himpunan bagian dari himpunan S. Demikian juga himpunan A merupakan himpunan semesta bagi himpunan B. Hubungan ketiga himpunan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut :

$A \subset S$ $\quad$ $B \subset A$
$B \subset S$ $\quad$ $B \subset A \subset S$

Contoh 1 - 6
A = {kendaraan bermotor}
B = {mobil}
C = {sepeda motor}

Di sini himpunan B dan himpunan C merupakan himpunan bagian dari himpunan A. Hubungan masing-masing antara A dan B dengan C dapat dinyatakan sebagai berikut :

$B \subset A$ $\quad$ $C \subset A$

■ Komplemen suatu himpunan

Jika S himpunan semesta dan A suatu himpunan yang terkandung dalam S, maka yang dimaksud dengan komplemen dari A adalah anggota himpunan S yang bukan anggota himpunan A.
Notasi komplemen A adalah A^C atau A'.

Contoh 1- 7
(a) A = {1, 2, 3}
S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

maka, A^C = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

(b) P = {1, 3, 5}
S = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

maka, P^C = {7, 9, 11}

■ Himpunan yang sama

Dua himpunan A dan B disebut sama, jika setiap anggota A adalah juga anggota B dan sebaliknya setiap anggota B juga merupakan anggota dari A.
Notasinya A = B

Contoh 1- 8

(a) A = {1, 2, 3, 4 } dan B = {4, 3, 2, 1}
maka, A = B

(b) P = {a, b, c} dan Q = {a, b, c, d}
maka, P $\neq$ Q

(c) R = {2, 4, 6} dan P = {l, m, n }
maka, R $\neq$ P

■ Himpunan ekivalen (Setara)

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B, jika jumlah anggota himpunan A sama dengan jumlah anggota himpunan B .

Notasinya : A $\sim$ B , jika n(A) = n(B)

Contoh 1 - 9

A = {a, b, c}
B = {kol, buncis, terung}
C = {1, 3, 5}

maka

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = 3 \\ n(B) = 3 \\ n(C) = 3 \end{array}\right\} \text{Jadi } A \sim B \sim C$$

■ Jumlah himpunan bagian suatu himpunan

Jika himpunan A memiliki anggota sebanyak n atau n(A) = n, maka banyaknya himpunan bagian dari A adalah 2^{n}.

Contoh 1 - 10

Perhatikan himpunan A = {a, b, c} $\rightarrow$ n = 3, maka himpunan A akan memiliki himpunan bagian sebanyak 2^3 = 8, yang dapat dirinci sebagai berikut :

(1) $\phi \in$ A	(3) {b} $\in$ A	(5) {a, b} $\in$ A	(7) {b, c} $\in$ A
(2) {a} $\in$ A	(4) {c} $\in$ A	(6) {a, c} $\in$ A	(8) {a, b,c} $\in$ A

Contoh 1 - 11

Himpunan bagian dari himpunan B = {1, 2} dengan n(B) = 2, sebanyak 2^2 = 4. Keempatnya dapat dirinci sebagai berikut :

(1) $\phi \in$ B
(2) {1} $\in$ B
(3) {2} $\in$ B
(4) {1, 2} $\in$ B

■ **Diagram Venn**

Diagram venn adalah diagram yang menunjukkan gambaran suatu himpunan atau gambaran himpunan dalam hubungannya dengan himpunan yang lain.

1.5 Operasi Himpunan

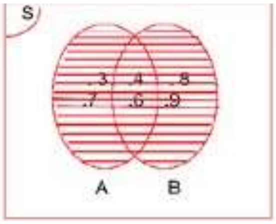
■ **Operasi gabungan (Union)**

Gabungan dari himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya merupakan anggota A atau B.
Notasinya : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$

Contoh 1 - 12
A = {3, 4, 6, 7}
B = {4, 6, 8, 9}

maka $A \cup B = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

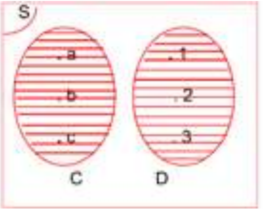
Diagram Venn-nya, dapat dinyatakan sebagai berikut :



Contoh 1 - 13
C = {a, b, c}
D = {1, 2, 3}

maka $C \cup D = \{1, 2, 3, a, b, c\}$

Dengan diagram Venn-nya sebagai berikut :



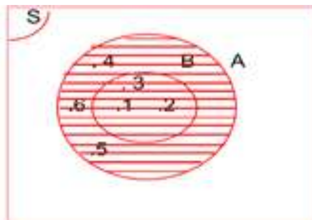
Contoh 1 - 14

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B = {1, 2, 3}

maka A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Diagram Venn-nya sebagai berikut :



■ Operasi irisan (Interseksi)

Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota A dan sekaligus juga anggota B. Notasinya A ∩ B = { x |x ∈ A dan x ∈ B}. Jika A ∩ B = ϕ , dikatakan A dan B saling lepas.

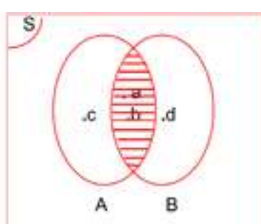
Contoh 1 - 15

A = {a, b, c}

B = {a, b, d}

maka A ∩ B = {a, b}

Diagram Venn-nya sebagai berikut :



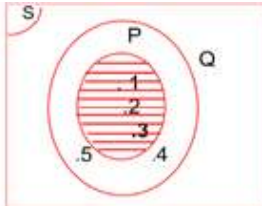
Contoh 1 - 16

P = {1, 2, 3}

Q = {1, 2, 3, 4, 5}

maka P ∩ Q = {1, 2, 3}

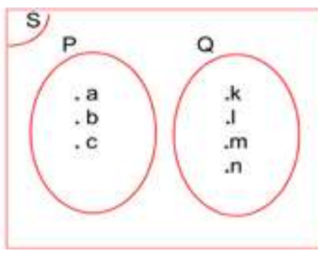
Diagram Venn-nya sebagai berikut :



Contoh 1 - 17
P = {a, b, c}
Q = {k, l, m , n}

maka $P \cap Q = \phi$
$= \{\ \}$

Diagram Venn-nya sebagai berikut :



■ **Operasi Selisih**

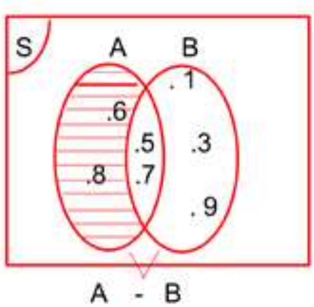
Selisih antara himpunan A dan himpunan B, adalah suatu himpunan yang anggotanya semua anggota A akan tetapi bukan anggota B.

Notasinya : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

Contoh 1 - 18
A = {5, 6, 7, 8}
B = {1, 3, 5, 7, 9}

maka, A – B = {6, 8}

Diagram Venn-nya, sebagai berikut :



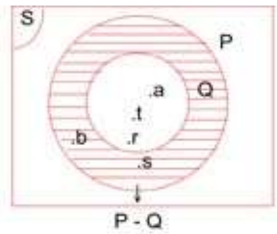
Contoh 1 - 19

P = {a, b , t, r, s}

Q = {a, t, r}

maka, P – Q = {b, s}

Diagram Venn-nya sebagai berikut :



■ **Operasi Tambah**

Jumlah antara himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang anggota-anggotanya himpunan A atau anggota himpunan B, tetapi bukan anggota irisan himpunan A dan himpunan B.

Notasinya : $A + B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B, \text{ dan } x \notin (A \cap B)\}$

$= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ dan } x \notin (A \cap B)\}$

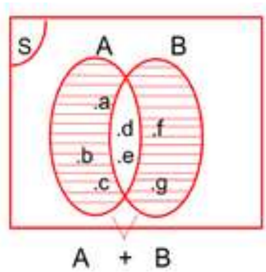
Contoh 1- 20

A = {a, b , c, d, e}

B = {d, e, f, g}

maka, A + B = {a, b, c, f, g}

Diagram Ven-nya sebagai berikut :



1.6 Hukum-hukum Operasi Himpunan

(1) Hukum Komutatif
- (a) $A \cup B = B \cup A$
- (b) $A \cap B = B \cap A$

(2) Hukum Asosiatif
- (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) Hukum Distributif
- (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$
- (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) Hukum De Morgan
- (a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- (b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(5) Hukum Idempoten
- (a) $A \cup A = A$
- (b) $A \cap A = A$

(6) Hukum Kelengkapan
- (a) $\phi^C = S$
- (b) $S^C = \phi$
- (c) $(A^C)^c = A$
- (d) $A \cup A^C = S$
- (e) $A \cap A^C = \phi$

(7) Sifat -sifat Lain dari Operasi Himpunan.
- (a) sifat reflektif : $A \subset A$
- (b) sifast transitif : $A \subset B$ dan $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- (c) sifat anti simetris : $A \subset B$ dan $B \subset A \Rightarrow A = B$
- (d) sifat penyerapan : $A \subset (A \cap B) = A$
  : $A \subset (A \cup B) = A$
- (e) $\phi \subset A \subset S$
  $\phi \cup A = A$ dan $\phi \cap A = \phi$
  $S \cup A = S$ dan $S \cap A = A$

Untuk dapat lebih memahami tentang himpunan perhatikanlah beberapa contoh berikut.

Contoh 1- 21
Hasil penelitian yang dilakukan terhadap 250 KK warga suatu desa, menyatakan 60 KK pemilik sawah dan 110 KK penggarap sawah. Sementara itu ada pula 100 orang yang bukan pemilik sawah maupun penggarap sawah. Tentukanlah banyak KK sebagai pemilik sekaligus penggarap sawah.

Penyelesaian

Misalkan : S = warga desa

A = himpunan pemilik sawah

B = himpunan penggarap sawah

maka,

$n(S) = 250$, $n(A) = 60$, $n(B) = 110$ dan $n(A \cup B)^C = 100$

$n(A \cap B) = . . . ?$

$$n(A \cup B) = n(S) - n(A \cup B)^C = 250 - 100 = 150$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$150 = 60 + 110 - n(A \cap B)$$

$$150 = 170 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 20$$

Jadi, banyaknya KK sebagai pemilik dan sekaligus penggarap sawah = 20

Contoh 1 - 22

Dalam suatu kelompok studi terdapat 10 mahasiswa suka nyontek, 12 mahasiswa suka ngerepek dan 5 mahasiswa suka nyontek sekaligus ngerepek. Berapa mahasiswa anggota kelompok studi tersebut?

Penyelesaian

Misalkan : A = himpunan mahasiswa suka nyontek

B = himpunan mahasiswa suka ngerepek

maka, $n(A) = 10$, $n(B) = 12$ dan $n(A \cap B) = 5$

$n(A \cup B) =$ .... ?

Rumus,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 12 – 5 = 17$$

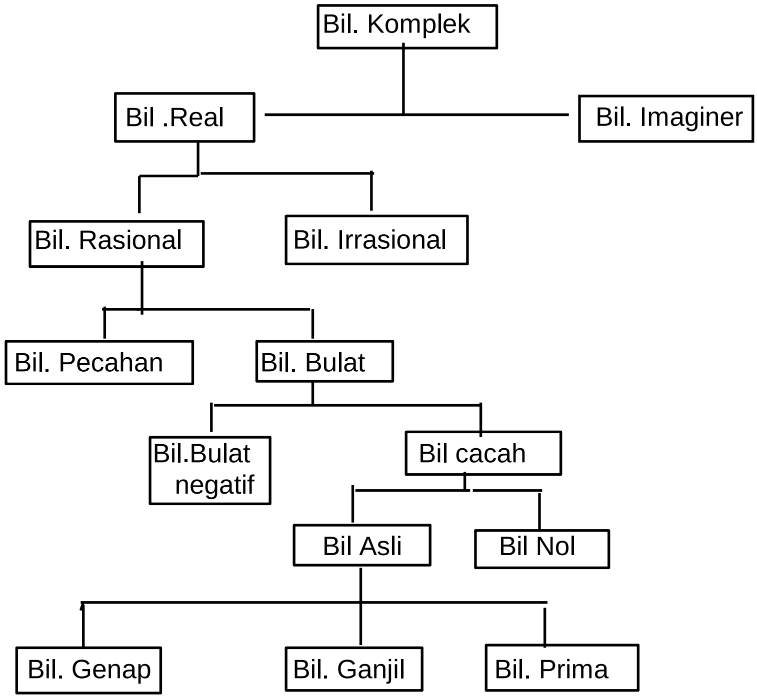
Jadi, jumlah anggota kelompok studi tersebut adalah 17 mahasiswa

1.7 Sistem dan Himpunan Bilangan

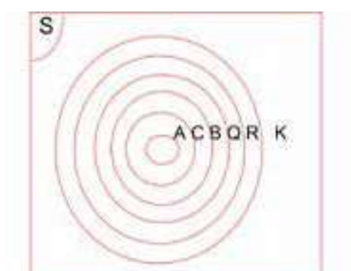
■ Pengelompokkan bilangan

Pembagian bilangan atau hubungan antara macam-macam bilangan dapat dijelaskan dengan diagram cabang dan diagram Venn berikut :

(a) Diagram Cabang



(b) Diagram Venn



■ Pengertian bilangan dan himpunan bilangan

Di bawah ini akan diberikan pengertian beberapa bilangan beserta himpunannya.

(1) Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah hasil bagi antara dua bilangan yang hasilnya bulat termasuk nol. Jika himpunan bilangan bulat dilambangkan B, maka :
B = { . . . - 5, - 4, - 3, - 2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}

(2) Bilangan Asli

Bilangan asli adalah bilangan - bilangan bulat positif.

Jika himpunan bilangan asli dilambangkan A, maka :
A = {1, 2, 3, 4, 5, . . .}

(3) Bilangan Cacah
Bilangan cacah adalah bilangan asli dan nol (0)
Jika himpunan bilangan cacah dilambangkan C, maka :
C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .}

(4) Bilangan Prima
Bilangan prima adalah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan 1, dan hanya habis dibagi oleh dirinya sendiri dan juga hanya habis dibagi oleh 1.
Jika himpunan bilangan prima dilambangkan dengan P, maka:
P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, . . .}

(5) Bilangan Rasional
Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan b $\neq$ 0.
Jika himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan Q, maka :
Q = { x | x = $\frac{a}{b}$, a dan b bulat dan b $\neq$ 0}

Contoh 1 - 23
Q = {2, 3, 4, 5, 6}
Q = {- 4, - 3, - 2, -1, 0}

(6) Bilangan Irrasional
Bilangan irrasional adalah bilangan yang tak dapat dituliskan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat b $\neq$ 0.
Jika himpunan bilangan irrasional dilambangkan dengan Q^C, maka :
Q^C = { x | x Real dan x $\notin$ Q}

Contoh 1 - 24
Q^C = $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{1}\ \}$
Q^C = $\{\pi, 2\pi, 3\pi\}$
Q^C = {log 5, log 6, log 7}

(7) Bilangan Komplek
Bilangan komplek adalah sebuah bilangan yang berbentuk a + b_i dengan a dan b bilangan- bilangan real dan “i” adalah lambang dari suatu bilangan yang bersifat bahwa, kuadratnya sama dengan -1, jadi i^2 = - 1.
Jika himpunan bilangan komplek dilambangkan dengan K , maka :
K = {a + b.i a, b adalah bilangan real dan i = $\sqrt{-1}$}

Contoh 1 - 25
K = {5 + 2i, 5 - 2i, 4 + 8i, ...}

Soal-soal Latihan

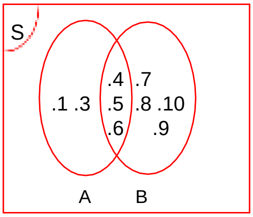
1 - 1 B = { {x | x < 4, x bilangan asli }
(a) Ubahlah cara penulisan himpunan B di atas
(b) Berapa banyaknya himpunan bagian dari B? Sebutkan.

1 - 2 P = {1, 2, 3} , Q = {3, 4, 5, 6} dan R = {6, 7, 8}
Tentukanlah
(a) $P \cup (Q \cap R)$
(b) $(P \cup Q) \cap (P \cup R)$
(c) $P \cap (Q \cup R)$
(d) $(P \cap Q) \cup (P \cap R)$
(e) $(P \cap Q \cap R)$
(f) $(P \cup Q \cup R)$

1 - 3 Hasil penelitian terhadap 50 orang ibu rumah tangga, ternyata 30 orang memilih sabun cair merek A, 34 orang memilih sabun cair merek B dan 14 orang memilih sabun cair merek A dan B.
(a) Berapa orang memilih sabun cair merek A tetapi tidak memilih merek B?
(b) Berapa orang memilih sabun cair merek B tetapi tidak memilih merek A?

1 - 4 Dari sebuah agen koran tercatat 150 orang pelanggan. Seratus (100) orang berlangganan koran Jawa Post, 70 orang berlangganan Kompas dan 40 orang orang berlangganan koran Jawa Post dan Kompas.
(a) Gambarlah diagram Venn-nya.
(b) Berapa orang yang tidak berlangganan koran Jawa Post dan Kompas?

1 - 5 Unsur-unsur himpunan pada diagram Venn di bawah ini adalah nomor urut daftar hadir mahasiswa yang mengikuti kelompok belajar.
A adalah kelompok belajar akuntansi.
B adalah kelompok belajar matematika ekonomi.



(a) Berapa mahasiswa yang belajar akuntansi?
(b) Berapa mahasiswa yang belajar matematika ekonomi?
(c) Berapa mahasiswa yang belajar akuntansi tetapi tidak belajar matematika ekonomi?
(d) Berapa mahasiswa yang belajar akuntansi dan matematika ekonomi?
(e) Berapa mahasiswa yang belajar matematika ekonomi tetapi tidak belajar akuntansi?

1 - 6 Tunjukkanlah diagram Venn bagi himpunan- himpunan di bawah ini.

(a) $P - (Q \cap R)$ (d) $(A \cup B)^C$
(b) $(P \cup Q) \cap R$ (e) $A^C \cap B^C$
(c) $P - Q$ (f) $A^C \cup B^C$

1 - 7 Dalam suatu suvei pemakaian sabun cuci (detergen) pada 500 rumah tangga, diperoleh data sebagai berikut :
275 rumah tangga memakai sabun detergen merek A,
240 rumah tangga memakai sabun detergen merek B,
325 rumah tangga memakai sabun detergen merek C,
125 rumah tangga memakai sabun detergen merek A dan merek B,
190 rumah tangga memakai sabun detergen merek A dan merek C,
55 rumah tangga memakai sabun detergen merek B dan merek C.
Berapa rumah tangga memakai ketiga macam sabun cuci tersebut ?

1 - 8 Diketahui :
A = {1, 2, 3}, B = {2, 5, 7} dan C = {1, 5, 7, 8}

Tentukanlah
(a) $A \cup B$
(b) $(A \cup B) \cup C$
(c) $B \cup C$
(d) $A \cup B \cup C$
(e) $(A \cap B) \cup C$
(f) $(A \cap B) \cap C$

1 - 9 Diketahui:
S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
A = {1, 3, 5, 7, 9}
B = {0, 2, 4, 6, 8, 10}

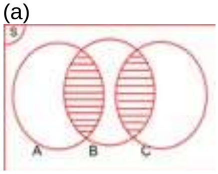
Tentukanlah
(a) $A \cup B$ (d) B^C
(b) $(A \cup B)^C$ (e) $A^C \cap B^C$
(c) A^C (f) $(A \cap B)^C$

1- 10 Suatu survei yang dilakukan terhadap 100 orang, menyatakan bahwa: terdapat 60 orang yang memiliki pesawat radio, dan 23 orang yang memiliki pesawat TV. Selanjutnya ternyata ada 30 orang yang tidak memiliki pesawat radio ataupun TV. Ada berapa orangkah yang memiliki pesawat radio dan TV ?

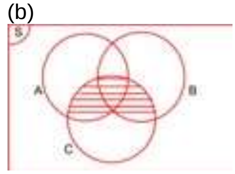
1- 11 Dari 100 orang pengikut ujian ternyata bahwa 40 orang lulus Matematika Ekonomi, 30 orang Teori Ekonomi dan 25 lulus dalam Matematika Ekonomi dan Teori Ekonomi. Berapa banyak pengikut yang gagal dalam kedua mata kuliah tersebut?

1- 12 Nyatakanlah himpunan daerah yang diarsir pada diagram Venn di bawah ini

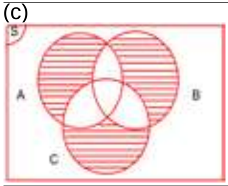
(a)



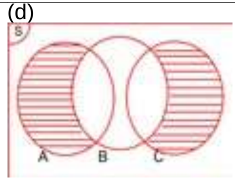
(b)



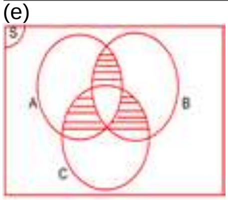
(c)



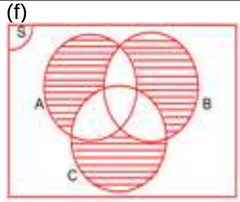
(d)



(e)



(f)



1- 13 Dari delapan puluh (80) mahasiswa diperoleh data sebagai berikut :

42 orang mahasiswa gemar olah raga,
33 orang mahasiswa gemar musik,
35 orang mahasiswa gemar melukis,
12 orang mahasiswa gemar olah raga dan musik,
17 orang mahasiswa gemar olah raga dan melukis,
10 orang mahasiswa gemar musik dan melukis, dan
7 orang mahasiswa gemar ketiga - tiganya

Pertanyaan

(a) Berapa mahasiswa yang hanya gemar olah raga?

(b) Berapa mahasiswa yang gemar olah raga dan melukis tapi tidak gemar musik?

(c) Berapa mahasiswa yang tidak gemar sama sekali dari ke tiga kegiatan tersebut?

(d) Berapa mahasiswa yang gemar olah raga, tetapi tidak gemar melukis?

Bab 2 RELASI DAN FUNGSI

2.1 Pengantar

Kejadian dalam dunia nyata ini, umumnya tidak berdiri sendiri melain--kan berhubungan satu sama lainnya atau ada kaitan antara satu kejadian dengan kejadian yang lainnya. Demikian juga khususnya dalam dunia bisnis dan ekonomi, variabel ekonomi yang satu berhubungan dengan variabel ekonomi lainnya atau dipengaruhi oleh variabel ekonomi lainnya. Hubungan di antara variabel ekonomi ini dapat dinyatakan atau diformulasikan dalam model matematika yang disebut " relasi" atau fungsi.

Biasanya model-model ekonomi yang berbentuk matematika dinyatakan dengan fungsi. Di samping itu, fungsi merupakan dasar untuk mempelajari lebih lanjut mengenai konsep kalkulus. Dalam bab ini akan dibahas mengenai relasi dan fungsi, yaitu batasan relasi dan fungsi, notasi dan nilai serta grafik suatu fungsi, unsur-unsur dan macam-macam fungsi, fungsi umum dan fungsi khusus.

Tujuan bab ini. Setelah mempelajari bab ini peserta didik (mahasiswa) diharapkan dapat memahami tentang relasi dan fungsi serta mampu mempermulasikan kejadian-kejadian ekonomi dalam bentuk relasi, terutama relasi khusus yaitu fungsi.

2.2 Relasi

Relasi atau hubungan dua himpunan A dan B adalah pengaitan (pemasangan) anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.

Jika R suatu relasi dari himpunan A ke B, maka dengan memakai notasi himpunan, **relasi** dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R = [\ (x,y)\ ;\ x \in A \text{ dan } y \in B\ ] \qquad (2.1)$$

Relasi atau hubungan dua himpunan A da B dapat dinyatakan dengan berbagai cara, antara lain:

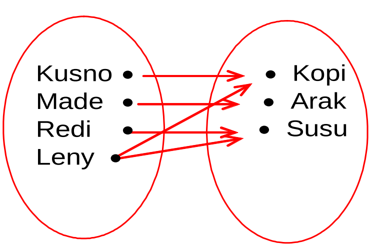
(a) Dengan diagram anak panah
Suatu relasi antara himpunan A dan B adalah pemasangan antara anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B.
(b) Dengan pasangan berurutan
Makudnya anggota pertama dari pasangan berurutan itu berasal dari himpunan A dan anggota keduanya berasal dari himpunan B.
(c) Dengan Grafik Cartesius
Grafik tersebut merupakan grafik relasi dengan menggunakan koordinat Cartesius.

Contoh 2 - 1
Kusno suka minum kopi
Made suka minum arak
Redi suka minum susu
Leny suka minum susu dan kopi

Jika Kusno, Made , Redi dan Leny dihimpun menjadi himpunan A, A = {Kusno, Made, Redi, Leny} dan kopi, arak, dan susu dihimpun menjadi himpunan B, B = {kopi, arak, susu}.

Dalam hal ini antara himpunan A dan himpunan B terlihat ada suatu relasi atau hubungan dengan penghubung "suka minum". Relasi atau hubungan antara himpunan A dan himpunan B, kalau dinyatakan dengan beberapa cara di atas adalah sebagai berikut:

(a) Dengan diagram anak panah



Anak panah menyatakan relasi <u>suka minum</u>

Gambar 2.1

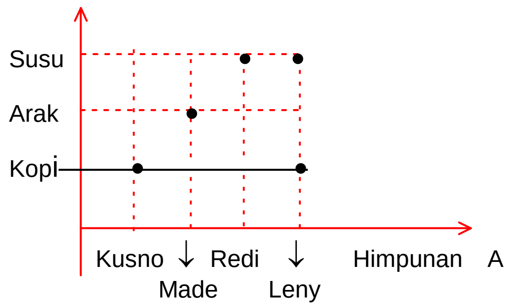
(b) Dengan himpunan pasangan berurutan,

(Kusno, kopi)
(Made, arak)
(Redi, susu)
(Leny, kopi)
(Leny, susu)

Himpunan pasangan berurutan sebagai berikut :
R = (Kusno, kopi), (Made, arak), (Redi, susu), (Leny, kopi), (Leny, susu)

(c) Dengan Grafik Cartesius

Himpunan B



Gambar 2.2

Koordinat titik-titik pada grafik Cartesius menyatakan pasangan berurutan dari relasi A dan B.

■ **Perkalian Cartesius**

Perkalian Cartesius adalah merupakan perkalian dua buah himpunan.

Definisi

Jika A dan B dua himpunan, maka A x B (dibaca “A kali B” atau “A *Cross* B”) adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari semua pasangan berurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ atau
$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$

Contoh 2- 2

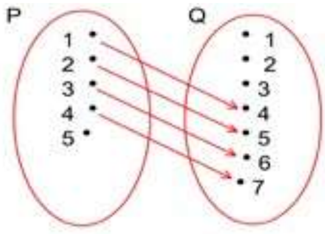
Bila A = {3, 5, 7} dan B = {a, b},
maka A x B dan B x A masing - masing dapat ditentukan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\} \\
&= \{(3, a), (3, b), (5, a), (5, b), (7, a), (7, b)\} \\
B \times A &= \{(x, y) \mid x \in B \text{ dan } y \in A) \\
&= \{(a, 3), (a, 5), (a, 7), (b, 3), (b, 5), (b, 7)\}
\end{aligned}
$$

Jika $R \in A \times B$, maka R disebut relasi dari himpunan A ke himpunan B.

Contoh 2- 3
Bila P = {1, 2, 3, 5} dan Q = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
Maka hubungan/relasi "tiga kurangnya dari" himpunan P ke himpunan Q, dapat dinyatakan dengan ketiga cara di atas sebagai berikut :

(a) Diagram anak panah



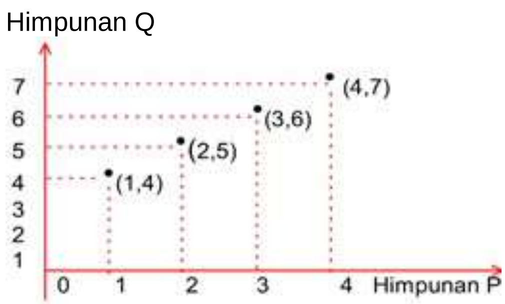
Anak panah menyatakan "tiga kurangnya dari "

Gambar 2.3

(b) Himpunan pasangan berurutan

R = {(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)}

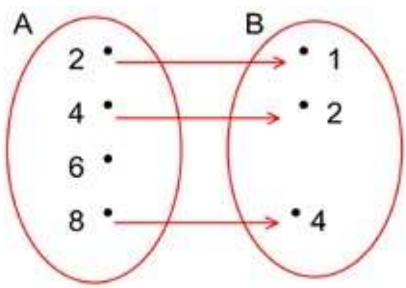
(c) Grafik Cartesius



Gambar 2.4

Contoh 2 - 4
Bila A = {2, 4, 6, 8} dan B = {1, 2, 4}, dan jika x ∈ A dan y ∈ B, maka relasi "x dua kali y" dengan menggunakan :
(a) Diagram anak panah, dan
(b) Pasangan berurutan,

Masing-masing dapat ditunjukkan sebagai berikut:
(a) Diagram anak panah



Gambar 2.5

Anak panah menyatakan
"dua kali "

(b) Himpunan pasangan berurutan
R = {(2, 1), (4, 2), (8, 4)}

2.3 Fungsi

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang mengaitkan atau memasangkan setiap anggota A dengan satu dan hanya satu anggota B.

Fungsi dari himpunan A ke B dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f : A \rightarrow B \qquad (2.2$$

Artinya jika x ∈ A dan y ∈ B dan a dikaitkan dengan b maka f(a) = b dengan:

1 A disebut daerah asal (domain).
2 B disebut daerah kawan (kodomain).
3 b disebut bayangan dari a.
4 Himpunan semua bayangan dari setiap x ∈ A disebut daerah hasil/ daerah jelajah atau range.

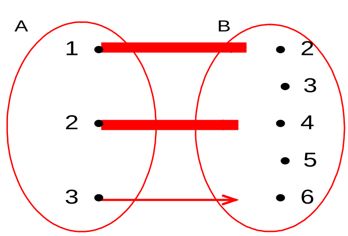
Seperti pada relasi, fungsi dapat dinyatakan pula dengan cara:

(a) Diagram anak panah
(b) Himpunan pasangan berurutan
(c) Grafik cartesius

Contoh 2 - 5

Bila A = {1, 2, 3} dan B = {2, 3, 4, 5, 6}

Jika x ∈ A dan y ∈ B, maka relasi "x setengah kali y" dari himpunan A ke himpunan B dengan diagram panah dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.6

Pada diagram anak panah Gambar 2.6, terlihat bahwa setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B. Jadi relasi tersebut merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B. Maka, untuk Contoh 2-5,

1 {1, 2, 3} = daerah asal (domain).

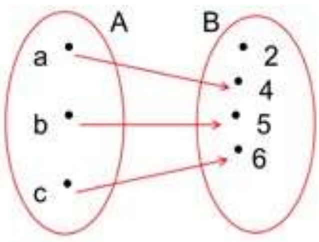
2 {2, 3, 4, 5, 6} = daerah kawan (kodomain).

3 $2 \in B$ adalah bayangan dari $1 \in A$.
$4 \in B$ adalah bayangan dari $2 \in A$.
$6 \in B$ adalah bayangan dari $3 \in A$.

4 {2, 4, 6} = daerah nilai (range).

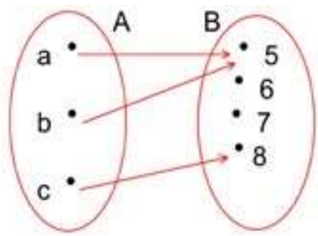
Untuk lebih jelasnya antara relasi dan fungsi, perhatikan beberapa relasi yang ditunjukkan oleh diagram anak panah di bawah ini.

(a)



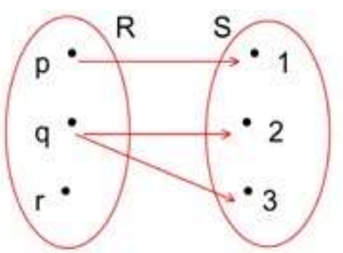
Suatu fungsi

(b)



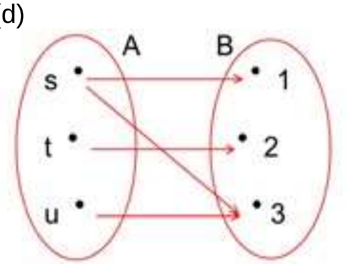
Suatu fungsi

(c)



Suatu relasi/bukan fungsi

(d)



Suatu relasi/bukan fungsi

Gambar 2.7

Gambar 2.7a dan 2.7b menunjukkan suatu fungsi, karena setiap anggota A dipasangkan hanya satu kali dengan satu anggota B.
Gambar 2.7c menunjukkan suatu relasi karena ada anggota R yaitu r, tidak memiliki pasangan dengan anggota S.
Gambar 2.7d menunjukkan suatu relasi karena ada anggota A yaitu s memiliki lebih dari satu pasangan anggota-anggota B (s anggota A dikaitkan dengan 1 dan 3 anggota B).

Jadi, suatu fungsi jelas merupakan suatu relasi dan suatu relasi belum tentu suatu fungsi**.**

■ Notasi Suatu Fungsi
Fungsi himpunan A ke himpunan B dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f : A \rightarrow B$$

Apabila fungsi tersebut mengaitkan $x \in A$ dengan $y \in B$, maka ditulis:

$$f(x) = y$$

atau

$$f : x \rightarrow y \qquad (2.3)$$

Misalkan fungsi tersebut mengaitkan x dengan 2x + 5, $x \in A$ dan $(2x + 5) = y \in B$, maka ditulis:

$$f(x) = 2x + 5$$

atau

$$f(x) = y = 2x + 5$$

Jadi, fungsi dapat ditulis dengan berbagai cara, misal fungsi f yang wilayah (domain) dan rangenya adalah himpunan bagian dari bilangan riil dan kaedahnya ditentukan oleh persamaan $y = x^3 + 5$, dapat ditulis dengan salah satu cara-cara berikut:

1 $y = x^3 + 5$
2 $f(x) = x^3 + 5$
3 f : (x, y) ialah fungsi pasangan berurut $(x, x^3 + 5)$
4 $f : x \rightarrow y$ ialah fungsi yang harganya diberikan oleh $f(x) = x^3 + 5$
5 (x,y) ; $y = x^3 + 5$

Dari kelima cara penulisan fungsi, yang lazim dipakai karena lebih singkat adalah cara (1) dan cara (2). Untuk fungsi f yang dinyatakan sebagai [(x,y)], x dan y disebut perubah/variabel. Himpunan nilai x tersebut berperan sebagai domain. Nilai perubah y yang merupakan bayangan dari nilai x, berperan sebagai range. Sementara x disebut variabel bebas (*independent variable*), dan y disebut variabel terikat (*dependent variable*). Ini berarti nilai fungsi [(x,y)] atau y = f(x) ditentukan oleh nilai x.

■ **Nilai Suatu Fungsi**
Bila suatu nilai x tertentu disubstitusikan ke dalam rumusan suatu fungsi y = f(x) maka diperoleh nilai fungsi tersebut (nilai y) pada nilai x tersebut. Bagi suatu fungsi yang mengandung dua variabel/perubah, bila nilai variabel/perubah bebasnya tertentu, maka nilai variabel/perubah terikatnya dapat ditentukan pula. Nilai variabel/perubah bebas boleh ditentukan sembarang yang akan menentukan nilai variabel/perubah terikatnya. Di bawah ini diberikan beberapa contoh, menghitung nilai suatu fungsi pada nilai x (variabel bebas) tertentu.

Contoh 2- 6

Diketahui : $f(x) = 2x + 1$

Dihitung : $f(0) = \ldots ?$

$f(1) = \ldots ?$

$f(½) = \ldots ?$

Penyelesaian

Pada $x = 0 \rightarrow f(0) = 2(0) + 1 = 1$

Pada $x = 1 \rightarrow f(1) = 2(1) + 1 = 3$

Pada $x = ½ \rightarrow f(½) = 2(½) + 1 = 2$

Contoh 2 - 7

Diketahui : $y = f(x) = x^3 + 2x - 4$

Dihitung : $f(2) = \ldots ?$

$f(-1) = \ldots ?$

$f(3) = \ldots ?$

$f(0) = \ldots ?$

$f(a) = \ldots ?$

Penyelesaian

$f(2) = 2^3 + 2(2) - 4$

$= 8$

$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) - 4$

$= -7$

$f(3) = 3^3 + 2(3) - 4$

$= 29$

$f(0) = 0^3 + 2(0) - 4$

$= -4$

$f(a) = a^3 + 2(a) – 4 = a^3 + 2a – 4$

Contoh 2 - 8

Diketahui : $y = 5x^2 + 4x + 15$

Hitunglah nilai fungsi pada x = 3, dan 0.

Penyelesaian

Menghitung nilai fungsi, artinya mencari nilai y, yaitu dengan memasukkan nilia x = 3 dan x = 0 masing-masing ke dalam persamaan fungsi itu.

$x = 3 \rightarrow y = 5x^2 + 4x + 15$

$= 5(3)^2 + 4(3) + 15$

$= 72$

$x = 0 \rightarrow y = 5x^2 + 4x + 15$

$= 5(0)^2 + 4(0) + 15$

$= 15$

Jadi, nilai fungsi tersebut pada x = 3 adalah 72, dan pada x= 0 adalah 15.

Contoh 2 - 9
Diketahui : $z = x^2 + 4xy + 15y + 150$
Hitunglah nilai fungsi pada x = 3 dan y = 2.

Penyelesaian
Nilai fungsi z tersebut dapat dicari dengan memasukkan nilai x = 3 dan y = 2 ke dalam fungsi itu, sebagai berikut :

$$\begin{aligned} z &= 3^2 + 4(3)(2) + 15(2) + 150 \\ &= 9 + 24 + 30 + 150 \\ &= 213 \end{aligned}$$

■ Grafik Suatu Fungsi

Kurva (grafik) suatu fungsi umumnya dapat dibuat melalui dua cara, yaitu:
(1) Menentukan dan menghubungkan titik-titik yang dilalui kurva. Titik - titik yang dilalui oleh kurva merupakan himpunan pasangan berurutan antara variabel bebas dan variabel terikat /nilai fungsinya.
(2) Menentukan dan menghubungkan titik-titik penting kurva. Titik-titik penting kurva yang dimaksud adalah titik potong kurva dengan sumbu tegak, titik potong kurva dengan sumbu datar, sumbu simetri (kalau ada), titik ekstrem kurva (kalau ada), titik belok (kalau ada), dan garis asimtot (kalau ada).

Dalam menggambar grafik suatu fungsi umumnya variabel terikat diletakkan pada sumbu vertikal (tegak) dan variabel bebas diletakkan pada sumbu horizontal (datar). Di dalam buku ini, terutama dalam penerapan fungsi dalam ekonomi secara konsisten variabel terikat diletakkan pada sumbu vertikal dan varibel bebas diletakkan pd sumbu horizontal. Untuk mendapatkan gambar grafik yang lebih sempurna, disarankan cara dua dilengkapi dengan cara satu.

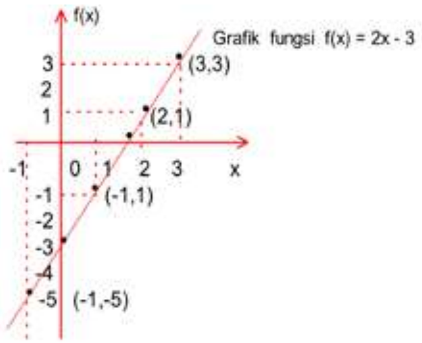
Contoh 2 - 10
Diketahui : A = Bilangan riil dan B = Bilangan riil
Tentukanlah : Grafik $f: A \rightarrow B$ dengan $x \in A$ dan $2x - 3 = y \in B$.

Penyelesaian
Fungsi tersebut dapat ditulis,
$f(x) = 2x - 3$ atau $y = f(x) = 2x - 3$

Grafik fungsi tersebut dapat dibuat dengan dua cara sebagai berikut:
(a) Cara pertama, yaitu menentukan dan menghubungkan titik-titik yang dilalui kurva.

Tabel pasangan nilai x dan f(x)

x	...	-1	0	1	2	3	...
f(x)	...	-5	-3	-1	1	3	...
{x, f(x)}	...	(-1,- 5)	(0,-3)	(1,-1)	(2,1)	(3,3)	...



Gambar 2.8

(b) Cara kedua, yaitu menentukan dan menghubungkan titik-titik penting. Oleh karena fungsinya linear, maka titik penting yang dimaksudkan adalah titik potong fungsi dengan sumbu tegak dan titik potong fungsi dengan sumbu datar.

Titik potong fungsi dengan sumbu tegak/sumbu f(x), bila x = 0, diperoleh:

$$f(x) = 2x - 3$$
$$f(x) = 2(0) - 3$$
$$f(x) = -3$$

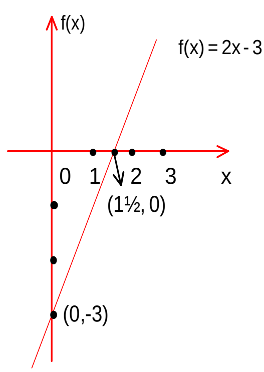
Jadi, titik potongnya dengan sumbu tegak adalah {x, f(x)} = (0, - 3)

Titik potong fungsi dengan sumbu datar/sumbu x, bila f(x) = 0, diperoleh:

$$f(x) = 2x - 3$$
$$0 = 2x - 3$$
$$2x = 3 \rightarrow x = 1\tfrac{1}{2}$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu datar adalah {x, f(x)} = (1½ ,0)

Gambar Grafik



Gambar 2.9

Contoh 2 - 11
Diketahui : A = {Bilangan riil} dan B = {Bilangan riil}

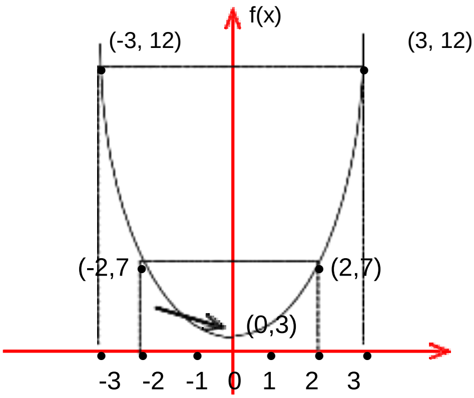
Tentukanlah : Grafik f: A $\rightarrow$ B dimana x $\in$ A dan 3 + x^2 $\in$ B

Penyelesaian
(a) Cara pertama, yaitu menentukan dan menghubungkan titik-titik yang dilalui kurva.
Fungsi tersebut dapat ditulis f(x) = 3 + x^2,

Tabel pasangan nilai x dan f(x)

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
f(x)	12	7	4	3	4	7	12
{**x, f(x)**}	(-3, 12)	(-2, 7)	(-1, 4)	(0, 3)	(1, 4)	(2, 7)	(3, 12)

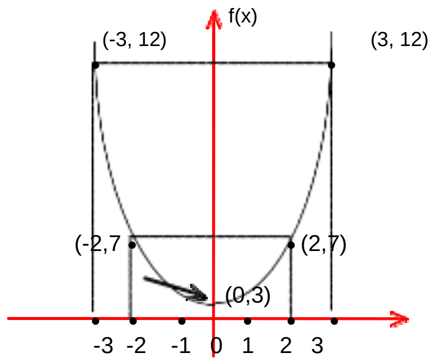
Gambar Grafik



Gambar 2.10

(b) Cara kedua, yaitu dengan menentukan dan menghubungkan titik - titik penting kurva. Perihal bagaimana membuat grafik suatu fungsi kuadrat, secara rinci dapat dibaca pada Bab 5.
(1) Titik potong kurva dengan sumbu f(x), yaitu pada{x, f(x)} = (0, 3)
(2) Titik potong kurva dengan sumbu x, bila f(x) = 0. Oleh karena D < 0, maka kurva fungsi tidak memotong sumbu x.
(3) Sumbu simetris, x = 0
(4) Titik puncak kurva, P{ x, f(x)} = P(0, 3)
(5) Titik lainnya yang dilalui kurva antara lain yaitu (3, 12), (-3, 12), (- 2, 7), dan (2, 7)

Gambar Grafiknya



Gambar 2.11

■ Unsur-unsur Suatu Fungsi

Unsur suatu fungsi adalah perubah/variabel, parameter/koefisien dan konstanta.

Variabel/perubah: ialah suatu besaran yang nilainya dapat berubah- ubah atau suatu besaran yang nilainya bervariasi.

Berdasarkan sifatnya di dalam suatu fungsi terdapat dua macam variabel yaitu variabel bebas (*independent variable*) dan variabel terikat (*dependent variable*).

Variabel bebas adalah variabel yang nilainya tidak bergantung dari nilai variabel lainnya atau variabel yang nilainya boleh ditentukan sembarang. Sedangkan variabel terikat adalah variabel yang nilainya tergantung pada nilai variabel bebasnya.

Koefisien, adalah bilangan (berupa konstanta tertentu yang nilainya telah ditetapkan) yang terkait langsung pada suatu variabel dalam sebuah fungsi, dan umumnya terletak di depan suatu variabel.

Parameter, adalah suatu konstanta tertentu yang nilainya belum ditetapkan, yang terkait langsung pada suatu variabel dalam sebuah fungsi. Parameter ini umumnya dilambangkan dengan huruf awal abjad Yunani atau Arab, misalnya: α , β dan γ atau a, b dan c.

Konstanta, adalah bilangan yang (jika ada) turut membentuk sebuah fungsi dan tidak terkait langsung dengan suatu variabel atau bilangan yang berdiri sendiri dalam suatu fungsi.

Contoh 2-12

1 $y = f(x) = 5x + 10$
y merupakan variabel terikat.
x merupakan variabel bebas.
angka 5 adalah koefisien dari x , angka 10 disebut konstanta.

2 $y = f(x) = a + bx$
x merupakan variabel bebas.

y merupakan variabel terikat.
kontanta **b** adalah paramter dari x , **a** adalah sauatu konstanta.

3 $z = f(x, y) = 2x + 5y + 10$
x dan y merupakan variabel bebas, z merupakan variabel terikat. Angka 2 adalah koefisien dari x dan angka 5 adalah koefisien dari y. Angka 10 disebut konstanta.

4 $z = f(x_1, x_2, x_3) = a - bx_1 + cx_2 + dx_3$
z merupakan variabel terikat.
x_1, x_2, dan x_3 merupakan variabel bebas.
a merupakan konstanta. **Minus b** di depan x_1 adalah parameter dari x_1, dan **c** di depan x_2 adalah parameter dari x_2, dan d adalah parameter dari x_3.

5 $C = f(P, Y) = a - bP + cY$
C (konsumsi) merupakan variabel terikat, P (harga), merupakan variabel bebas, Y (pendapatan) merupakan variabel bebas.
a merupakan konstanta. **Minus b** di depan P adalah parameter dari P, dan **c** di depan Y adalah parameter dari Y.

2.4 Fungsi Umum dan Fungsi Khusus

Fungsi umum. Fungsi umum adalah suatu fungsi yang hanya dinyatakan dalam variabel bebas dan variabel terikat saja, tanpa memberikan penjelasan bagaimana hubungan atau pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikatnya.

Contoh 2 - 13

Teori ekonomi, menyatakan bahwa konsumsi seseorang (C) tergantung dari (atau dipengaruhi oleh) tingkat penghasilannya (Y). Hubungan ekonomi antara dua variabel tersebut dapat dinyatakan dengan fungsi umum, C = f(Y).

Persamaan C = f(Y) ini mencatat hubungan antara konsumsi dan tingkat penghasilan (pendapatan), akan tetapi tidak memberikan penjelasan bagaimana penghasilan seseorang tersebut mempengaruhi konsumsinya. Berpengaruh positip atau negatif? Berapa besar pengaruhnya?

Fungsi khusus. Fungsi khusus adalah suatu fungsi yang dapat menjelaskan tentang hubungan atau pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikatnya

Contoh 2 - 14

Hubungan ekonomi antara pendapatan seseorang dengan konsumsinya yang dinyatakan dalam bentuk umum C = f(Y), dapat pula dinyatakan dengan fungsi khusus, misalnya sebagai berikut :

C = 200 + 0,3Y

Persamaan ini, dengan jelas menyatakan bahwa hubungan atau pengaruh pendapatan (Y) terhadap konsumsinya (C) adalah positif. Hal ini dinyatakan oleh angka koefisien variabel bebas Y, adalah positif (+). Berapa besar pengaruhnya . Hal ini dapat dilihat dari nilai angka koefisien dari Y yaitu (positif) 0,3. Angka koefisien sebesar 0,3 itu memiliki arti bahwa setiap kenaikan pendapatan (Y) sebesar satu unit, mengakibatkan konsumsi (C) naik (meningkat) sebesar 0,3 unit. Jadi, fungsi umum, tidak menjelaskan bagaimana dan berapa besar pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikatnya. Sebaliknya fungsi khusus dapat menjelaskan bagaimana dan berapa besar pengaruh variabel bebas terhadap variabel terikatnya.

2.5 Tipe-tipe Fungsi

1 Dilihat dari operasinya, maka ada dua type fungsi, yaitu:
(1) Fungsi aljabar, dan (2) Fungsi transenden/non aljabar.

Dengan pembagian selengkapnya sebagai berikut:

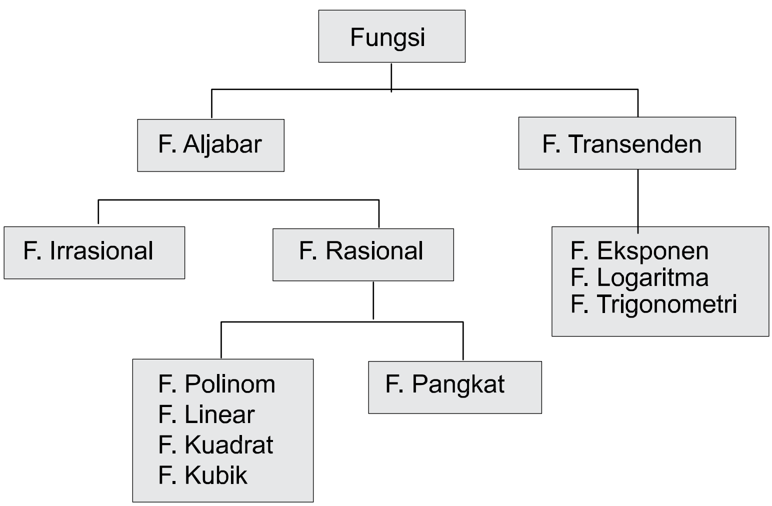


Diagram 2.1

2 Dilihat dari hubungan antara variabel-variabel yang terdapat dalam suatu fungsi, maka fungsi dapat dibedakan atas 2 (dua), yaitu: (1) fungsi **eksplisit,** dan (2) fungsi **implisit**

Fungai eksplisit, ialah suatu fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya dengan jelas dapat dibedakan, atau bila letak variabel bebas dan variabel terikatnya berbeda ruas dalam persamaan.

Contoh 2 – 15

$y = f(x) = 2x + 5$ $\quad$ $z = f(x, y) = 2x + 3y + 5$

$y = x^2 + 5x + 100$ $\quad$ $z = f(x, y) = 3x^2 + y$

Fungsi implisit, ialah suatu fungsi yang variabel bebas dan variabel terikatnya sukar dibedakan, atau bila letak variabel bebas dan variabel terikatnya dalam satu ruas dalam persamaan.

Contoh 2-16

$f(x, y) = 0$ atau $f(x, y) = k$	$f(x, y, z) = 0$ atau $f(x, y, z) = k$
$2x + 3y - 2 = 0$	$2x + 5y - 3z + 5 = 0$
$2x + 3y = 2$	$2x + 5y - 3z = 5$
$2x + 5y + 5 = 0$	$x^2 + 3y + 3y^2 + 8 = 0$
$2x + 5y = 5$	$x^2 + 3y + 3y^2 = 8$

3 Dilihat dari jumlah variabel bebas yang terdapat dalam suatu fungsi, maka fungsi dibedakan atas dua, yaitu : (1) fungsi **univariabel** (univariat) dan (2) fungsi **multivariabel** (multivariat**).**

Fungsi univariabel yaitu suatu fungsi dengan satu variabel bebas.

Contoh 2–17

$y = f(x)$	$Q = f(L)$
$y = 2x + 2$	$Q = 3L^2 + L + 10$
$y = x^2 + 6x + 4$	$Q = 5L + 5$
$y = 2x$	$Q = 3L$

Fungsi multivariabel/multivariat, yaitu suatu fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas.

Contoh 2-18

$z = f(x, y)$	$Q = f(K, L)$
$z = 2x + 3y + 5$	$Q = 2K + 3\ KL + 10L + 5$
$z = 2x^2 + 5y + 3$	$Q = K^2 + KL + L^2$
$z = 3x^2 + xy + y^2$	$Q = 2K^2 + 3KL$

2.6 Transposisi Rumus

Dalam aplikasi matematika di bidang ekonomi dan bisnis, untuk tujuan atau memenuhi suatu syarat tertentu, kadang kala diperlukan perubahan bentuk rumus, misalnya dari bentuk $y = f(x)$ ke dalam bentuk $x = f(y)$. Menurut Jacques (2006), perubahan bentuk rumus sedemikian itu disebut transposisi rumus (*trasposition of formulae*). Misalnya yang disyaratkan adalah fungsi total revenu dalam bentuk $R = f(Q)$. Sementara, diketahui fungsi permintaannya dalam bentuk $Q = f(P)$. Agar diperoleh fungsi $R = f(Q)$, maka fungsi permintaan Q = f(P) harus dimanipulasi/ditransposisi terlebih dahulu ke dalam bentuk P = f(Q). Lihat Contoh 6-5 pada Bab 6 dan Contoh 9-9 pada Bab 9.

Contoh 2- 19

Nyatakan fungsi y = f(x) berikut ini ke dalam bentuk x = g(y).

(a) $y = f(x) = 3x + 10$
(b) $y = f(x) = 5x^2$
(c) $y = f(x) = x^2 - 10$
(d) $y = f(x) = x^2 + 20x + 100$

Penyelesaian

(a) $y = 3x + 10$

$y - 10 = 3x$

$x = \frac{1}{3}(y - 10)$

maka, $x = g(y)$

$x = \frac{1}{3}(y - 10)$

(b) $y = 5x^2$

$x^2 = \frac{y}{5}$

$x = \sqrt{\frac{y}{5}}$

maka, $x = g(y)$

$x = \sqrt{\frac{y}{5}}$

(c) $y = x^2 - 10$

$y + 10 = x^2$

$x = \sqrt{y+10}$

maka, $x = g(y)$

$x = \sqrt{y+10} = (y + 10)^{1/2}$

(d) $y = x^2 + 20x + 100$

$y = (x + 10)^2$

$\sqrt{y} = (x + 10)$

$\sqrt{y} - 10 = x$

maka, $x = g(y)$

$x = \sqrt{y} - 10 = y^{1/2} - 10.$

2.7 Fungsi Versus Persamaan

Dalam bagian ini perlu dijelaskan perbedaan istilah fungsi dan istilah persamaan (kesamaan).

Fungsi. Secara singkat yang dimaksudkan dengan fungsi adalah relasi khusus; Suatu relasi yang untuk setiap nilai variabel bebas (nilai tunggal) hanya dapat memberikan satu nilai (nilai tunggal) variabel terikat.

Persamaan. Persamaan (*equation*) menyatakan kesamaan dua ekspresi (ungkapan) aljabar (Budnick, 1993). Ekspresi aljabar dapat dinyakan dalam bentuk satu variabel, dua variabel atau lebih. Menurutnya, bahwa persamaan (kesamaan) ada tiga jenis yaitu : (1) Identitas, (2) Persamaan bersyarat dan (3) Pernyataan palsu.

(1) Identitas (*identity*);
Sebuah indentitas adalah persamaan yang benar (nilai ruas kanan sama dengan nilai ruas kiri) untuk semua nilai variabel.

Contoh 2- 20
3(x + y) = 3x + 3y

Misalnya, untuk x = 2, dan y = 1, jika kedua nilai ini disubstitusikan ke dalam persamaan itu, maka nilai ruas kanan sama dengan nilai ruas kiri.

3(2 + 1) = 3(2) + 3(1)
3(3) = 6 + 3
9 = 9

Misalnya, untuk x = 0 dan y = 5, maka nilai kedua ruas (kanan dan kiri) sama, didapat sebagai berikut:

3(0 + 5) = 3 (0) + 3(5)
15 = 15

Contoh 2 –21

$$5x + 2 = \frac{10x + 4}{2}$$

Misalnya, untuk x = 2, didapat nilai kedua ruas adalah sama yaitu 12.

(2) Persamaan bersyarat (*a conditional equatio*n)
Persamaan ini berlaku hanya untuk nilai tertentu.

Contoh 2-22
x + 5 = 9
Persamaan ini hanya benar untuk x = 4.

(3) Pernyataan palsu (*a false statement atau contradiction*).
Suatu persamaan yang tidak pernah benar (nilai ke dua ruas) tidak akan pernah sama.

Contoh 2-23
x = x + 3

Dalam kaitan penerapan matematika dalam ekonomi, menurut Chiang dan Wainwright (2005), persamaan dibagi atas tiga jenis juga yaitu : (1) Persamaan definisi, (2) Persamaan perilaku, dan (3) Persamaan bersyarat.

(1) Persamaan definisi (*Defisional equation*)
Persamaan ini membentuk indentitas antara dua pernyataan yang mempunyai arti sama persis.

Contoh 2-24

a) Total laba adalah selisih antara total pendapatan dan total biaya
$\pi = R - C$

b) Dari sisi permintaan, pendapatan nasional adalah penjumlahan antara konsumsi dan tabungan nasional.
$Y = C + S$

(2) Persamaan perilaku (*behavioral equation*)
Persamaan ini menunjukkan perilaku suatu variabel dalam merespon perubahan variabel lainnya.

Contoh 2-25

a) $C = 50 + 5Q^2$

b) $C = 100 + Q^2$

Kedua fungsi biaya ini memiliki persamaan yang berbeda, maka asumsi dari masing-masing kondisi produksi juga berbeda.

(3) Persamaan bersyarat (*Conditional equation*)
Persamaan ini menyatakan suatu persyaratan yang harus dipenuhi.

Contoh 2- 26

a) $Q_d = Q_s$ (syarat keseimbangan pasar barang)

b) $S = I$ (syarat keseimbangan pendapatan nasional)

Soal-soal Latihan

2 - 1 Buatlah grafik fungsi :

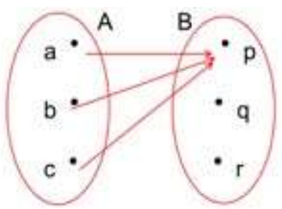
a $f : x \rightarrow x^2 + 6x + 4$ atau $f(x) = x^2 + 6x + 4$

b $f : x \rightarrow 2x + 1$ atau $f(x) = 2x + 1$

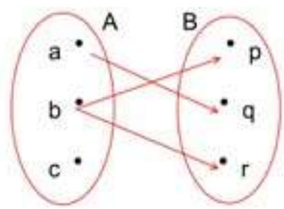
c $f : x \rightarrow 3x$ atau $f(x) = 3x$

2 - 2 Manakah fungsi dari relasi yang ditunjukkan oleh diagram di bawah ini?

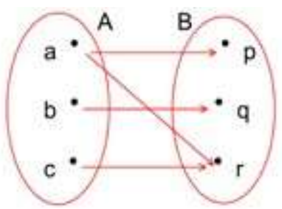
(a)



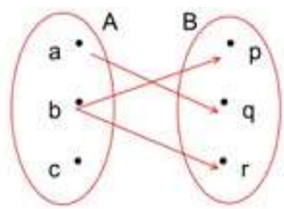
(b)



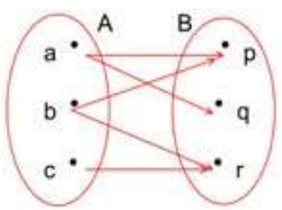
(c)



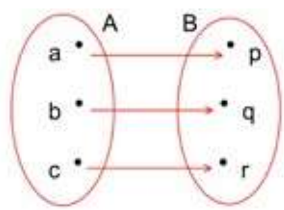
(d)



(e)



(f)



Gambar 2.12

2 - 3 Fungsi-fungsi berikut ini adalah fungsi y dalam x yaitu y = f(x). Nyatakanlah fungsi-fungsi berikut ke dalam bentuk x = f(y).

(a) $y = f(x) = 2x$.
(b) $y = f(x) = -5x + 2$.
(c) $y = f(x) = x^2 + 9$
(d) $y = f(x) = 4x^2$
(e) $y = f(x) = x^2 - 10x + 25$
(f) $y = f(x) = x^2 + 18x + 81$
(g) $y = f(x) = 4x^2 + 20x + 25$

2 - 4 Nyatakanlah model matematikanya dalam bentuk fungsi umum untuk hubungan ekonomi di bawah ini.

(a) Kuantitas barang yang diminta oleh konsumen (q) tergantung dari tingkat harganya (p).
(b) Investasi (I) tergantung dari tingkat suku bunga pinjaman (i).
(c) Total penjualan suatu perusahaan (R) tergantung dari jumlah barang yang terjual (q).
(d) Kuantitas barang yang ditawarkan oleh produsen (q) tergantung dari harga pasar (p).
(e) Kuantitas produksi (Q) tergantung dari jumlah modal (k), jumlah tenaga kerja (l), dan teknologi (t).
(f) Jumlah barang yang diminta oleh konsumen (q) tergantung dari harganya (p), selera konsumen (t), pendapatan konsumen (y), harga barang substitusi (r), dan jumlah kosumen potensial (k).

2 - 5 Berikanlah satu contoh fungsi khusus, untuk masing-masing fungsi umum pada Soal 2–4.

2 - 6 Dari sejumlah hubungan ekonomi di bawah ini, periksalah mana variabel terikat dan variabel bebasnya? Setelah itu, nyatakan hubungan antar variabel dalam bentuk fungsi umum.
(a) PBB (Pajak Bumi dan Bangunan) yang dipungut oleh pemerintah tergantung dari nilai jual obyek pajak (NJOP).
(b) Omzet penjualan sebuah perusahaan (s) tergantung dari harga satuan produk (p), insentif (i), pengalaman tenaga pemasaran (e), biaya iklan yang dikeluarkan oleh perusahaan (a).
(c) Harga jual kendaraan bermotor (h) tergantung dari usia kendaraan (u), keadaan fisiknya (f) dan jenis kendaraan (m).
(d) Impor suatu negara (m) dipengaruhi oleh pendapatan nasionalnya (Y).
(e) Pertumbuhan ekonomi (g) mempengaruhi jumlah pengangguran (u).
(f) Jumlah uang beredar (M_s) mempengaruhi inflasi (I_f).
(g) Pendapatan (y) mempengaruhi pengeluaran konsumsi (C).
(h) Sumberdaya (R) dan teknologi (T) mempengaruhi partumbuhan ekonomi (Gr).
(i) Jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen/penjual (q) dipengaruhi oleh harga pasar (p), teknik produksi (t), pajak (tx) dan tingkat suku bunga (r).
(j) Ekspor (E) dan investasi asing (I) mempengaruhi pendapatan nasional suatu Negara (Y).

2 - 7 Carilah nilai fungsi-fungsi berikut, bila nilai variabel bebasnya diberikan oleh:

Fungsi	Variabel bebas
(a) $Q = f(K, L) = 2K + 5L – L^2$	$K = 5$, dan $L = 1$
(b) $C = f(Y) = 200 + 0,6Y$	$Y = 100$
(c) $Q = f(P) = - 3P^2 + 10$	$P = 4$
(d) $Q = f(P_1, P_2) = - 20 + 5P_2 – P_1$	$P_2 = 6$, dan $P_1 = 2$
(e) $I = f(i) = - 3i + 20$	$i = 5$

Bab 3 FUNGSI LINEAR DAN PERSAMAAN GARIS LURUS

3.1 Pengantar

Fungsi linear adalah bentuk fungsi yang paling sederhana. Banyak hubungan antara variabel ekonomi, dalam jangka pendek dianggap linear. Pengetahuan tentang fungsi linear sangat diperlukan untuk dapat memahami fungsi-fungsi yang lebih komplek dan konsep kalkulus.

Di dalam bab ini akan dibahas mengenai fungsi linear dan persamaan garis lurus yang mencakup pengertian fungsi linear, grafik fungsi linear, gradien dan persamaan garis lurus serta hubungan dua garis lurus.

Tujuan bab ini. Setelah mempelajari bab ini peserta didik (mahasiswa) diharapkan dapat memahami dengan jelas mengenai fungsi linear dan persamaan garis lurus.

3.2 Definisi Fungsi Linear

Fungsi linear adalah fungsi f pada domain R yang ditentukan oleh $f(x) = mx + n$ dengan m, n bilangan riil (R) dan $m \neq 0$. Dengan kata lain, fungsi linear adalah suatu fungsi yang pangkat tertinggi dari variabel bebasnya adalah satu. Fungsi linear memiliki persamaan $y = mx + n$ dan grafiknya merupakan garis lurus. Secara umum, fungsi linear dapat dinyatakan berikut:

$$y = f(x) = mx + n$$
$$m, n \in R, \text{ dan } m \neq 0 \qquad (3.1)$$

m = gradien/slope garis, n = suatu konstanta

3.3 Grafik Fungsi Linear

Untuk menggambarkan grafik fungsi linear cukup dengan menentukan dua titik yang terletak pada persamaan garis lurus tersebut.

Contoh 3 - 1
Gambarlah grafik dari y = mx + n dengan m, n $\in$ R dan m $\neq$ 0.

Penyelesaian
(1) Titik potong kurva dengan sumbu x, bila y = 0, diperoleh

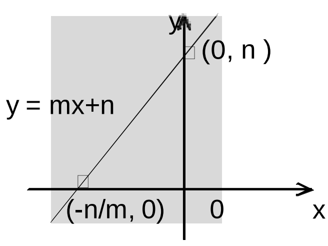
$$y = 0 \rightarrow y = mx + n$$
$$0 = mx + n$$
$$x = -n/m$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu x, adalah (-n/m, 0)

(2) Titik potong kurva dengan sumbu y, bila x = 0, diperoleh

$$x = 0 \rightarrow y = mx + n$$
$$y = m.0 + n$$
$$y = n$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y, adalah (0, n)



Gambar 3.1

Contoh 3 - 2
Gambarlah Grafik dari y = - 2x + 4

Penyelesaian
y = -2x + 4

(1) Titik potong kurva dengan sumbu x, bila y = 0, diperoleh

$$y = 0 \rightarrow y = -2x + 4$$
$$0 = -2x + 4$$

$$2x = 4$$
$$x = 2$$

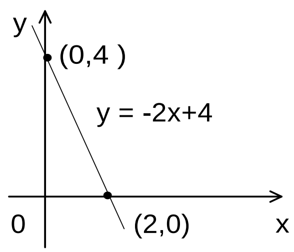
Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah (2, 0)

(2) Titik potong kurva dengan sumbu y, bila x = 0, diperoleh

$$x = 0 \rightarrow y = -2x + 4$$
$$= -2(0) + 4$$
$$= 4$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0, 4)

Gambar grafik



Gambar 3.2

Contoh 3 - 3

Gambarlah grafik dari y = 5x + 2

Penyelesaian

y = 5x + 2

(1) Titik potong kurva dengan sumbu x, bila y = 0, diperoleh

$$y = 0 \rightarrow y = 5x + 2$$
$$0 = 5x + 2$$
$$-2 = 5x \rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

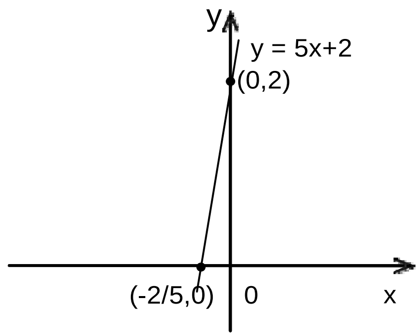
Jadi, titik potongnya dengan sumbu x adalah ($-\frac{2}{5}$, 0)

(2) Titik potong kurva dengan sumbu y, bila x = 0, diperoleh

$$x = 0 \rightarrow y = 5x + 2$$
$$= 5(0) + 2$$
$$= 2$$

Jadi, titik potongnya dengan sumbu y adalah (0, 2)

Gambar grafik



Gambar 3.3

3.4 Gradien dan Persamaan Garis Lurus

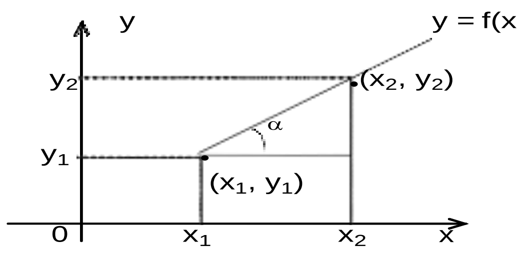
■ Gradien Garis Lurus

Bila fungsi linear y = f(x) = mx + n digambar dalam bidang cartesius, maka grafiknya berupa garis lurus. Kemiringan garis (yang juga disebut slope garis atau gradien) pada setiap titik yang terletak pada garis lurus tersebut adalah tetap, yaitu sebesar **m**.

Slope atau **gradien** garis lurus y = f(x) adalah hasil bagi antara perubahan dalam variabel terikat dengan perubahan dalam variabel bebasnya. Secara geometris, gradien/kemiringan garis lurus adalah sama dengan nilai tangen sudut yang dibentuk oleh garis lurus tersebut dengan sumbu x positif dihitung mulai sumbu x positif berlawanan arah jarum jam. Jadi, gradien garis lurus ini dapat dinyatakan sebagai berikut :

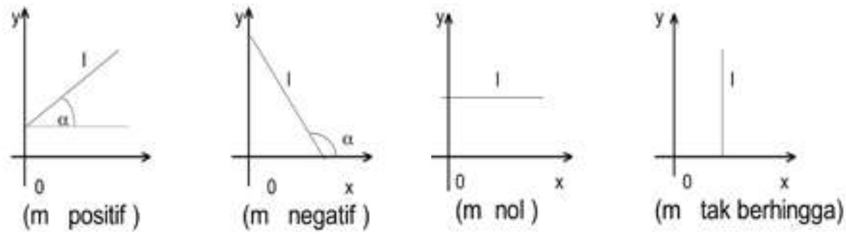
$$m = \frac{\text{Perubahan dalam var iabel terikat}}{\text{Perubahan dalam var iabel bebas}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg}\,\alpha \qquad (3.2)$$

m = gradien/slope/kemiringan garis



Gambar 3.4

Gradien yang juga disebut angka arah suatu garis lurus dapat memiliki nilai positif (bila $0° < \alpha < 90°$), dapat negatif (bila $90° < \alpha < 180°$), dapat nol (bila $\alpha = 0°$) dan dapat juga tak berhingga (bila $\alpha = 90°$). Untuk lebih jelasnya lihat Gambar 3.5.



Gambar 3.5

■ Persamaan garis lurus

Di bawah ini akan dipelajari beberapa persamaan garis lurus.

(1) Persamaan garis lurus melalui titik (0,0) dengan gradien sebesar m.

$$y = m\,x \tag{3.3}$$

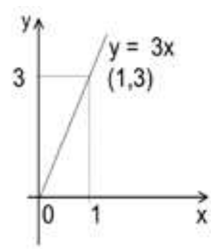
Contoh 3 - 4

Tentukanlah persamaan garis lurus l yang melalui titik (0,0), yang memiliki angka arah (gradien) 3. Gambar grafiknya.

Penyelesaian

m = 3
y = mx
y = 3x

Jadi, persamaan garis lurus l tersebut adalah y = 3x



Gambar 3.6

(2) Persamaan garis lurus bergradien m dan memotong sumbu y di titik (0, n)

$$y = mx + n \tag{3.4}$$

Contoh 3-5

Tentukanlah persamaan garis lurus k, yang memiliki

(a) Gradien - 5, dan melalui titik (0, 4).
(b) Gradien 3, dan melalui titik (0, - 6)

Penyelesaian

(a) $m = -5$
$n = 4$
$y = mx + n$
$= -5x + 4$
$y = -5x + 4$
Jadi, persamaan garis lurus k tersebut adalah $y = -5x + 4$

(b) $m = 3$
$n = -6$
$y = mx + n$
$= 3x - 6$
$y = 3x - 6$
Jadi, persamaan garis lurus k tersebut adalah $y = 3x - 6$

(3) Persamaan garis lurus dengan gradien m, yang melalui titik $A(x_1, y_1)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (3.5)$$

Contoh 3-6

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien 3, dan melalui titik A (5, 2). Buatlah grafiknya.

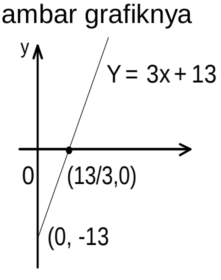
Penyelesaian

$m = 3$, dan titik A (5, 2) $\rightarrow$ $x_1 = 5$ dan $y_1 = 2$,

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 2 = 3(x - 5)$
$y - 2 = 3x - 15$
$y = 3x - 13$

$y = 3x - 13 \Leftrightarrow y = mx + n$
Jadi, $m = 3$
$n = -13$

Gambar grafiknya



Gambar 3.7

Titik potong dengan sumbu x,
$(-n/m, 0) = (13/3, 0)$

Titik potong dengan sumbu y,
$(0, n) = (0, -13)$

(4) Persamaan garis lurus yang melalui dua titik yaitu titik $A(x_1, y_1)$ dan titik $B(x_2, y_2)$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (3.6)$$

Contoh 3-7

Tentukanlah persamaan garis yang melalui
(a) Titik A(2, 3) dan B(- 2, 5)
(b) Titik P(4, 2) dan Q(3, 4)
(c) Titik K (2, 2) dan R(5, 5)

Penyelesaian

(a) A (2, 3) $\rightarrow$ $x_1 = 2$ dan $y_1 = 3$
B (- 2, 5) $\rightarrow$ $x_2 = -2$ dan $y_2 = 5$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \blacktriangleright \frac{y-3}{5-3} = \frac{x-2}{-2-2} \blacktriangleright \frac{y-3}{2} = \frac{x-2}{-4} \blacktriangleright y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(b) P(4, 2) $\rightarrow$ $x_1 = 4$ dan $y_1 = 2$
Q(3, - 4) $\rightarrow$ $x_2 = 3$ dan $y_2 = -4$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{-4-2} = \frac{x-4}{3-4}$$

$$\frac{y-2}{-6} = \frac{x-4}{-1}$$

y - 2 = 6 (x - 4)
y - 2 = 6x - 24
y = 6x - 22

(c) K(2, 2) $\rightarrow$ $x_1 = 2$ dan $y_1 = 2$
R(5, 5) $\rightarrow$ $x_2 = 5$ dan $y_2 = 5$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-2}{5-2}$$

$$\frac{y-2}{3} = \frac{x-2}{3}$$

y - 2 = x - 2
y = x

(5) Persamaan Segmen Suatu Garis Lurus
Persamaan garis lurus yang memotong sumbu X pada x_1 dan sumbu Y pada y_1 adalah

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1 \qquad (3.7)$$

Contoh 3 - 8

Tentukanlah persamaan garis lurus yang memotong sumbu x pada x = 5 dan sumbu y pada y = 3.

Penyelesaian

Dalam hal ini, $x_1 = 5$, dan $y_1 = 3$,
maka,

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$$

3x + 5y = 15
5y = -3x + 15
y = - x + 3

(6) Persamaan Garis Lurus Ax + By + C = 0

Di awal bab ini telah diuraikan bahwa bentuk y = mx + n merupakan persamaan garis lurus. Bentuk Ax + By + C = 0 dengan A $\neq$ 0 dan B $\neq$ 0, juga merupakan persamaan garis lurus, hanya letak variabel x dan y yang berbeda, kalau yang pertama letak y dan x berbeda ruas, y terletak diruas kiri dan x terletak di ruas kanan tanda kesamaan (=). Fungsi yang pertama disebut fungsi eksplisit. Sedangkan yang kedua letak variabel y dan x dalam satu ruas, kedua variabel terletak di ruas kiri atau kedua variabel terletak diruas kanan tanda kesamaan (=). Fungsi yang kedua disebut fungsi implisit..

Umumnya semua fungsi eksplisit dapat diubah ke dalam fungsi implisit, tapi tidak sebaliknya, maksudnya tidak semua fungsi implisit dapat diubah menjadi fungsi eksplisit.

Bentuk eksplisit		**Bentuk implisit**
y = mx + n		Ax + By + C = 0
y = - 4x + 8	$\Leftrightarrow$	2x + 0,5y – 4 = 0
y = 2x + 4	$\Leftrightarrow$	y - 2x = 4
....?	$\Leftrightarrow$	$x^2 + 2xy + y^2 = 0$

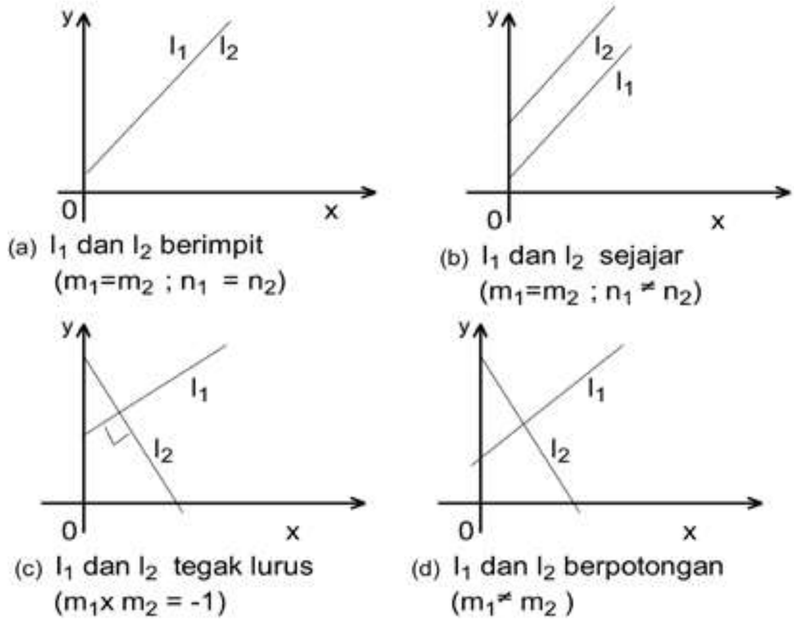
3.5 Hubungan Dua Garis Lurus

Dua buah garis lurus l_1 dan l_2 satu sama lainnya kemungkinan sejajar, berimpit, saling tegak lurus dan berpotongan.

Misalkan :
Garis lurus l_1 : $y = m_1 x + n_1$
Garis lurus l_2 : $y = m_2 x + n_2$

(1) **Dua garis lurus berimpit** (l_1 dan l_2), bila $m_1 = m_2$ dan $n_1 = n_2$
(2) **Dua garis lurus sejajar** (l_1 dan l_2), bila $m_1 = m_2$ dan $n_1 \neq n_2$,
(3) **Dua garis lurus saling tegak lurus** (l_1 dan l_2), bila $m_1 \times m_2 = -1$
(4) **Dua garis lurus saling berpotongan** (l_1 dan l_2), bila $m_1 \neq m_2$

Keempat kemungkinan yang terjadi antara garis lurus l_1 dan l_2 itu, seperti Gambar 3.8.



Gambar 3.8

Contoh 3- 9

Tentukanlah persamaan garis lurus k, yang ditarik dari titik P (3, 4) yang
(a) Sejajar dengan garis l, y = - 2x + 1
(b) Tegak lurus dengan garis l, y = - 2x + 1

Penyelesaian

(a) Garis l : y = - 2x + 1 $\rightarrow$ $m_1 = -2$
Garis k // garis l $\rightarrow$ $m_k = m_l = -2$

P(3, 4) $\rightarrow$ $x_1 = 3$ dan $y_1 = 4$

Persamaan garis k

Dengan rumus 3.5, diperoleh persamaam garis k, sebagai berikut:

$y - y_1 = m(x - x_1)$, dan telah diketahui bahwa, $m = m_k = -2$, maka,

$$
\begin{aligned}
y - 4 &= -2(x - 3) \\
&= -2x + 6 \\
y &= -2x + 10
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan garis k // garis l dan melalui/ditarik dari titik P(3, 4) adalah y = - 2 x + 10.

(b) Garis k $\perp$ garis l $\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
m_k \times m_l &= -1 \\
m_k \times (-2) &= -1 \\
m_k &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

P(3, 4) $\rightarrow$ $x_1 = 3$, $y_1 = 4$

Persamaan garis k

Dengan rumus 3.5, diperoleh persamaan garis k, sebagai berikut :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ dan telah diketahui bahwa, $m = m_k = \frac{1}{2}$, maka

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 3)$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 4$$
$$= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Jadi, persamaan garis k $\perp$ garis l dan melalui titik P(3, 4) adalah $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Contoh 3 - 10

Carilah titik potong garis l_1, $y = 2x + 1$ dan garis l_2, $y = -x + 4$

Gambar grafiknya.

Penyelesaian

Dua garis berpotongan, berarti kedua garis tersebut memiliki titik persekutuan. Titik persekutuan itu merupakan solusi atau penyelesaian simultan dari sitem persamaan yang dibentuk oleh kedua persamaan garis. Jadi, mencari titik potong dua buah garis sama artinya mencari solusi atau penyelesaian simultan dari sistem persamaan yang dibentuk oleh kedua garis. Penyelesaian simultan dari sistem persamaan tersebut adalah nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan garis.

Titik potong garis l_1 dan l_2 di atas dapat dicari dengan melenyapkan salah satu varibelnya (variabel y atau x).

y dilenyapkan untuk mencari nilai x, sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} y = 2x + 1 \\ \underline{y = -x + 4} \; - \\ 0 = 3x - 3 \end{array}$$

$$0 = 3x - 3$$
$$3 = 3x$$
$$x = 1$$

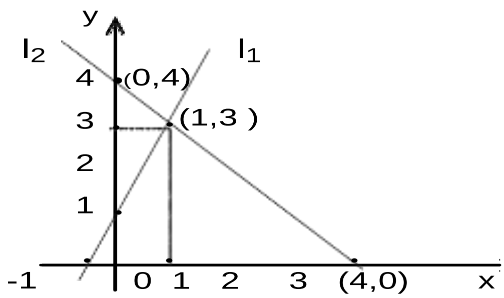
Nilai x = 1 dimasukkan kesalah satu persamaan (di sini nilai x dimasukkan ke dalam persamaan garis l_1), diperoleh nilai y sebagai berikut:

$$x = 1 \rightarrow y = 2x + 1$$
$$= 2(1) + 1 = 3$$

Jadi, titik potong garis l_1 dan l_2 adalah (1, 3).

Gambar Grafik

y = 2x + 1			y = - x + 4		
x	0	-½	x	0	4
y	1	0	y	4	0
(x, y)	(0, 1)	(-½, 0)	(x, y)	(0, 4)	(4, 0)



Gambar 3.9

Contoh 3 - 11

Carilah titik potong garis l_1, y = 2x + 5 dan garis l_2, y = - 3x + 20.

Penyelesaian

y dilenyapkan untuk mencari nilai x, sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll} y = 2x + 5 & \qquad 5x = 15 \\ \underline{y = -3x + 20\ \_} & \qquad x = 3 \\ 0 = 5x - 15 & \end{array}$$

Bila nilai x = 3 dimasukkan ke dalam salah satu persamaan dan diperoleh nilai y,

$$\begin{aligned} y &= 2x + 5 \\ &= 2(3) + 5 = 11 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong garis l_1 dan l_2 tersebut adalah (x, y) = (3,11)

Soal-soal Latihan

3 - 1 Tentukanlah kemiringan/slope garis di bawah ini.

(a) $y = 2x + 5$ (d) $y - 3x + 2 = 0$
(b) $y = - 3x$ (e) $y = 5$
(c) $3y + 5x - 10 = 0$ (f) $x = 4$

3 - 2 Ditentukan tiga titik A(- 2, 3), B(4, 5) dan titik C(- 2, 4).

(a) Carilah persamaan garis yang melalui titik A dan B.
(b) Carilah persamaan garis yang melalui titik A dan C.
(c) Carilah persamaan garis yang melalui titik B dan C.
(d) Buatlah grafiknya dalam satu gambar.

3 - 3 Tentukanlah gradien dan persamaan garis lurus yang melalui :

(a) Titik A (2, 5) dan titik B (- 1, 4).
(b) Titik A (- 2, 3) dan titik B (6, - 3).
(c) Titik A (2, 3) dan titik B (5, 7).

3 - 4 Tentukanlah persamaan garis lurus yang,

(a) Melalui titik A (1, 3) dan sejajar garis $y - 2x + 1 = 0$.
(b) Melalui titik P(3, 0) dan tegak lurus garis $6x + y - 4 = 0$.
(c) Memotong sumbu x sepanjang 5 dan memotong sumbu y sepanjang 2 dari titik asal.

3 - 5 Carilah titik potong dua garis lurus di bawah ini dan buatlah grafik-nya dalam satu gambar.

(a) Garis lurus $l_1 : x + y = 5$
Garis lurus $l_2 : 2x - y = 5{,}5$
(b) Garis lurus $l_1 : y = - x + 15$
Garis lurus $l_2 : y = x + 3$
(c) Garis lurus $l_1 : y = - 2x + 12$
Garis lurus $l_2 : y = 2x + 4$

3 - 6 Periksalah pasangan garis di bawah ini, apakah garis-garis tersebut sejajar, berimpit, saling tegak lurus atau berpotongan. Gambarlah grafiknya.

(a) Garis $l_1 : y = 3x + 5$
Garis $l_2 : y = 3x + 2$
(c) Garis $l_1 : y = 2x + 5$
Garis $l_2 : y = - x + 3$
(b) Garis $l_1 : y = 4x + 10$
Garis $l_2 : y = 4x + 10$
(d) Garis $l_1 : y - x = 6$
Garis $l_2 : y - 3x = 2$

Bab 4 APLIKASI FUNGSI LINEAR DALAM EKONOMI DAN BISNIS

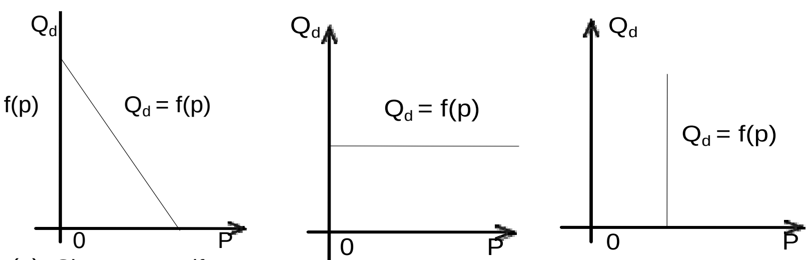
P = harga per unit barang (jasa), Q_d = kuantitas barang (jasa) yang diminta

Sementara fungsi permintaan yang linear secara umum dinyatakan sebagai,

$$= a - bP \qquad (4.2)$$

Q_d = kuantitas barang yang diminta konsumen/pembeli, P = harga per unit barang, a = konstanta, yaitu bilangan yang menunjukkan kuantias barang yang diminta oleh konsumen bila harga per unit barang tersebut nol, dan parameter b menunjukkan slope kurva permintaan. Slope kurva permintaan adalah negatif.

■ Kurva/Grafik Fungsi Permintaan



(a) Slope negatif (b) Slope nol (c) Slope tak berhingga)

Gambar 4.1

Umumnya (dalam keadaan normal) kurva permintaan memiliki angka arah (slope) yang negatif (Gambar 4.1a), yang menunjukkan juga, bahwa antara harga dengan kuantitas terdapat hubungan negatif (yang terbalik), yang artinya bila harga suatu barang naik, kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) berkurang, dan sebaliknya, bila harga suatu barang turun maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) bertambah.

Tetapi dalam keadaan khusus (dalam kasus-kasus tertentu) angka arah kurva permintaan mungkin nol, yaitu kuantitas barang yang diminta tetap tanpa memperhatikan harga (Gambar 4.1b), dan mungkin saja tak berhingga (tak terdefinisikan), yaitu kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) berubah pada harga yang tetap (Gambar 4.1c).

Contoh 4-1

Fungsi permintaan suatu barang berbentuk

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

P = harga per unit barang

Q_d = kuantitas barang yang diminta

Pertanyaan

(a) Tentukanlah batas-batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan tersebut.
(b) Berapakah kuantitas barang yang diminta bila harga per unit barang tersebut : 15 dan 10?
(c) Berapakah harga tertinggi yang masih mau dibayar oleh pembeli (konsumen) untuk barang tersebut?
(d) Bila barang tersebut merupakan barang bebas, berapa unit barang maksimal akan diminta oleh pembeli (konsumen)?
(e) Buatlah grafiknya.

Penyelesaian

(a) Batas-batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan.

(1) Bila Q_d = 0, maka nilai P = ...?

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

$$0 = 10 - \frac{P}{5}$$

P = 50

(2) Bila P = 0, maka nilai Q_d = ... ?

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

$$Q_d = 10 - \frac{0}{5}$$

Q_d = 10

Jadi, batas-batas nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan adalah :

$$0 \le Q_d \le 10 \text{ dan } 0 \le P \le 50$$

(b) Q_d = . . . ?, bila P = 15 dan P = 10

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

(1) Bila P = 15, maka Q_d,

$$Q_d = 10 - \frac{p}{5}$$

$$Q_d = 10 - \frac{15}{5}$$

$= 7$

(2) Bila P = 10, maka Q_d ,

$$Q_d = 10 - \frac{p}{5}$$

$$Q_d = 10 - \frac{10}{5}$$

$= 8$

Jadi, bila harga per unit barang tersebut masing-masing 15 dan 10 maka kuantitas barang yang diminta masing-masing sebanyak 7 unit dan 8 unit.

(c) Harga tertinggi terjadi bila tidak ada satu konsumen pun sanggup membelinya (tidak ada barang yang dibeli oleh pembeli/konsumen), ini berarti $Q_d = 0$.

Bila $Q_d = 0$, maka P = . . . ?

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

$$0 = 10 - \frac{P}{5}$$

$$-10 = -\frac{P}{5} \rightarrow P = 50$$

Jadi, harga tertinggi yang masih mau dibayar oleh pembeli/konsumen adalah lebih rendah (tidak mencapai) 50 ($P \approx 50$)

(d) Jika barang tersebut merupakan barang bebas, maka harga barang tersebut adalah nol, P = 0.
Bila P = 0, Q_d = . . . ?

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

$$Q_d = 10 - \frac{0}{5}$$

$$Q_d = 10$$

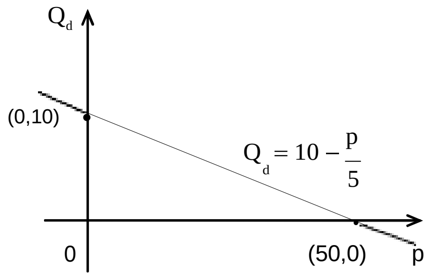
Jadi, bila barang tersebut merupakan barang bebas, maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli/konsumen maksimal sebanyak 10 unit.

(e) Gambar grafik

$$Q_d = 10 - \frac{P}{5}$$

Tabel pasangan nilai Q_d dan P

Q_d	0	10
P	50	0
(P, Q_d)	(50, 0)	(0, 10)



(Gambar 4.2)

Contoh 4 - 2
Permintaan terhadap sejenis barang berdasarkan hasil penelitian pasar ditunjukkan oleh data berikut:

Harga per unit (P)	Kuantitas barang yang diminta (Q_d)
3	55
5	45
9	25

Bila persamaan garis permintaan dianggap linear, berdasarkan data di atas,
(a) Tentukanlah fungsi permintaan barang tersebut.
(b) Berapa kuantitas barang yang diminta, bila harga per unit barang tersebut adalah 6.
(c) Buatlah grafiknya.

Penyelesaian
(a) Untuk menentukan persamaan garis fungsinya, cukup diambil dua titik, sebagai berikut.

Titik pertama : Jika $P_1 = 3$, maka $Q_1 = 55 \rightarrow (P_1, Q_1) = (3, 55)$
Titik kedua : Jika $P_2 = 5$, maka $Q_2 = 45 \rightarrow (P_2, Q_2) = (5, 45)$

Per rumus 3.6, didapat fungsi permintaannya,

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 3}{5 - 3} = \frac{Q - 55}{45 - 55}$$

$$\frac{P - 3}{2} = \frac{Q - 55}{-10}$$

$$P - 3 = \frac{Q - 55}{-5}$$ (kedua ruas dikalikan 2)

$$P = \frac{Q - 55}{-5} + 3$$

$$P = (-\frac{1}{5}Q + 11) + 3$$

$$P = -\frac{1}{5}Q + 14$$

Q = - 5P + 70

Jadi, Q_d = - 5P + 70

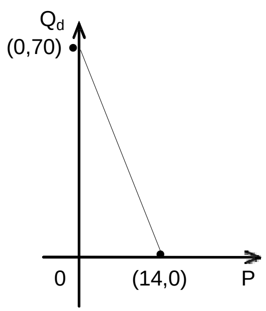
(b) Bila P = 6, Q_d = . . . ?
$Q_d = - 5P + 70$
$Q_d = - 5(6) + 70$
$Q_d = 40$

Jadi, jika harga per unit barang tersebut 6, maka kuantitas barang yang diminta sebanyak 40 unit.

(c) Gambar grafiknya
$Q_d = - 5p + 70$

Tabel pasangan nilai P dan Q_d

Q_d	0	70
P	14	0
(P, Q_d)	(14,0)	(0,70)

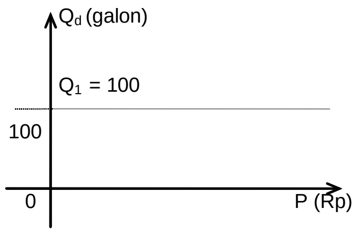


Gambar 4.3

Contoh 4 - 3
Untuk kelangsungan suatu proyek, sebuah developer, setiap bulan memerlukan 100 galon premium tanpa memandang berapa rupiah pun harganya. Tentukanlah fungsi permintaannya dan gambar grafiknya.

Penyelesaian
$Q_d = Q_1 = 100$

Gambar Grafik



Gambar 4.4

4.3 Fungsi Penawaran

Fungsi penawaran suatu barang/jasa adalah fungsi yang menyatakan hubungan antara harga (pasar) suatu barang (jasa) dengan kuantitas barang (jasa) yang ditawarkan oleh penjual (produsen) dalam kurun waktu tertentu, dengan asumsi *ceteris paribus* (variabel bebas lainnya yang mempengaruhi kuantitas barang yang ditawarkan konstan). Variabel bebas lainnya yang dimaksud antara lain adalah teknik produksi, pajak, subsidi, dan tingkat suku bunga (pinjaman) bank.

■ Notasi fungsi penawaran

Fungsi penawaran terhadap harga secara umum dapat dinyatakan sebagai,

$$Q_s = f(P) \tag{4.3}$$

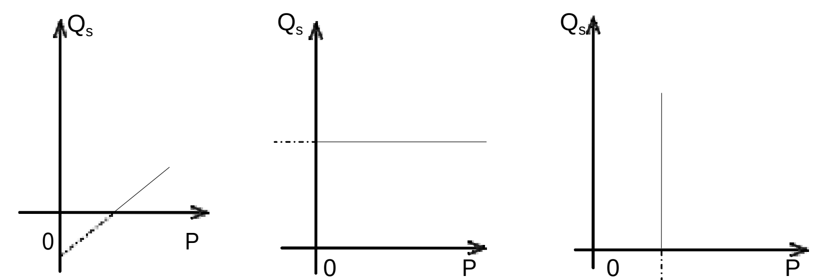
Q_s = kuantitas barang/jasa yang ditawarkan
P = harga per unit barang/jasa

Sementara fungsi penawaran yang linear secara umum dapat dinyatakan sebagai,

$$Q_s = c + dP \tag{4.4}$$

Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan, P = harga per unit barang, c = suatu konstanta, menunjukkan kuantitas yang ditawarkan oleh penjual/produsen bila harga per unit nol; parameter d menunjukkan slope kurva penawaran. Slope kurva penawaran bertanda positif.

■ Kurva/grafik fungsi penawaran



(a) Slope positif (b) Slope nol (c) Slope tak berhingga)

Gambar 4.5

Umumnya (dalam keadaan normal) kurva penawaran memiliki angka arah/slope positif (Gambar 4.5a), yang menunjukkan bahwa hubungan antara harga dengan kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual /produsen adalah positif (berbanding lurus), yang artinya bila harga suatu barang naik, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual /produsen bertambah dan apabila harga pasar barang tersebut turun, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual/produsen berkurang.

Akan tetapi dalam kasus-kasus tertentu (dalam keadaan khusus) angka arah kurva penawaran dapat nol (Gambar 4.5b) yaitu kuantitas yang ditawarkan oleh penjual/ produsen akan tetap tanpa memperhatikan harga, dapat juga angka arahnya tak berhingga atau tak terdefinisikan (Gambar 4.5c) yaitu kuantitas yang ditawarkan oleh penjual/ produsen berubah pada harga tetap

Contoh 4 - 4

Diketahui fungsi penawaran sejenis barang

$$Q_s = \tfrac{5}{3}P - 6$$

P = harga tiap unit barang

Q_S = kuantitas barang yang ditawarkan oleh produsen/penjual

Pertanyaan

(a) Tentukanlah batas-batas nilai Q_S dan P yang memenuhi fungsi penawaran barang tersebut.

(b) Berapakah kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual (produsen), bila harga per unit barang tersebut: 12, dan 6.

(c) Berapakah harga terendah, sehingga tak ada seorang penjual (produsen) pun yang mau menawarkan barangnya.

(d) Berapakah harga per unit barang, sehingga penjual (produsen) masih mau menawarkan barangnya.

Penyelesaian

(a) Batas-batas nilai Q_S dan P yang memenuhi fungsi penawaran

$$Q_s = \tfrac{5}{3}P - 6$$

Bila Q_S = 0, maka

$$0 = \tfrac{5}{3}P - 6$$

$$6 = \tfrac{5}{3}P$$

$$P = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Jadi, batas-batas nilai Q_S dan P yang memenuhi fungsi penawaran tersebut adalah : $Q_S \geq 0$ dan $P \geq 3{,}6$.

(b) Q_S = . . . ? Bila P = 12 dan P = 6

$$Q_s = \tfrac{5}{3}P - 6$$

Bila P = 12 → $Q_S = \tfrac{5}{3}(12) - 6 = 14$

Bila P = 6 → $Q_S = \tfrac{5}{3}(6) - 6 = 4$

Jadi, bila harga per unit barang masing-masing 12 dan 6, maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh penjual (produsen) masing-masing sebanyak 14 unit dan 4 unit.

(c) Tak ada seorang penjual (produsen) pun yang mau menawarkan barangnya, ini berarti, $Q_S = 0$.

$$Q_s = \tfrac{5}{3}P - 6$$

$$0 = \tfrac{5}{3}P - 6$$

$$5p = 18$$

$$P = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Jadi, harga terendah sehingga tidak ada seorang penjual (produsen) pun yang menawarkan barangnya adalah 3,6 per unit.

(d) Harga per unit barang sehingga produsen masih bersedia menawarkan barangnya adalah lebih tinggi dari 3,6.

Contoh 4 - 5

Berdasarkan hasil penelitian pasar penawaran terhadap suatu barang keadaannya sebagai berikut:

Harga per unit (P)	Kuantitas barang yang ditawarkan (Q_S)
2	0
4	4
5	6

Jika dalam jangka pendek garis penawaran tersebut dianggap linear, tentukanlah:
(a) Fungsi penawarannya.
(b) Bila harga per unit barang tersebut 10, berapakah kuantitas barang yang ditawarkan oleh produsen?
(c) Buatlah grafiknya.

Penyelesaian

(a) Untuk menentukan garis fungsinya, cukup diambil dua titik saja sebagai berikut :

Titik pertama : Bila $P_1 = 2$, maka $Q_1 = 0 \rightarrow (P_1, Q_1) = (2, 0)$
Titk kedua : Bila $P_2 = 5$, maka $Q_2 = 6 \rightarrow (P_2, Q_2) = (5, 6)$

Per rumus 3.6 didapat fungsi penawarannya.

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 2}{5 - 2} = \frac{Q - 0}{6 - 0}$$

$$\frac{P - 2}{3} = \frac{Q - 0}{6}$$

$P - 2 = \frac{Q}{2}$ (kedua ruas dikalikan 3)

$2(P - 2) = Q$

$2P - 4 = Q$

$$Q = 2P - 4$$

Jadi, $Q_s = 2P - 4$

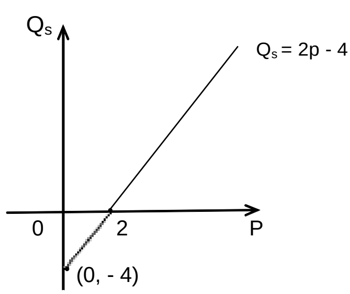
(b) Bila P = 10, $Q_s = . . .?$

$Q_s = 2p - 4$
$Q_s = 2(10) - 4 = 16$

(c) Gambar grafik

$Q_s = 2p - 4$

P	0	2
Q_s	- 4	0
(P,Q_s)	(0, - 4)	(2, 0)

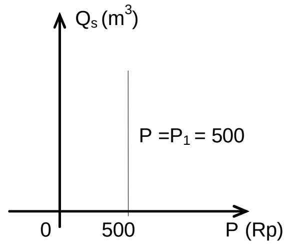


Gambar 4.6

Contoh 4 - 6
Pihak PDAM menawarkan air bersih dan sehat kepada masyarakat perkotaan. Tiap KK per bulan dikenakan pembayaran Rp 500,00 berapa m^3 pun yang dikonsumsinya. Tentukanlah fungsi penawarannya dan buatlah grafiknya.

Penyelesaian
$P = P_1 = 500$

Gambar grafik



Gambar 4.7

Contoh 4 - 7

Periksalah persamaan beberapa fungsi berikut, apakah fungsi tersebut merupakan fungsi permintaan, fungsi penawaran, termasuk keduanya atau bukan keduanya (P = harga per unit barang, Q adalah Q_d atau Q_s).

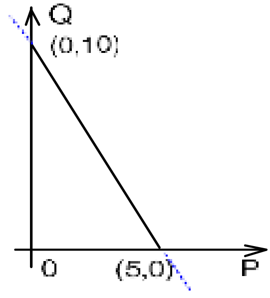
(a) Q + 2P - 10 = 0
(b) 2Q – 6P - 12 = 0
(c) Q – 2P = 0
(d) Q - 5 = 0
(e) 3Q + 5P + 15 = 0

Penyelesaian

Secara umum untuk menyelesaikan soal semacam ini, adalah sebagai berikut : **Pertama** tentukan terlebih dahulu slope garisnya, positif atau negatif. **Kedua** periksa kurvanya apakah ada kurva atau penggal kurva yang terletak di kuadran pertama. Kalau slopenya negatif kemungkinan (belum tentu) fungsi permintaan, lanjutkan memeriksa grafiknya. Apakah letak kurva atau penggal kuvanya terletak di kuadran pertama? Bila ya, persamaan tersebut merupakan persamaan fungsi permintaan. Bila tidak, persamaan tersebut bukan persamaan dari fungsi permintaan. Kalau slopenya positif dapat dipastikan persamaan tersebut persamaan dari fungsi penawaran. Kalau slope garis itu nol atau tak berhingga (fungsi bilangan konstan), maka persamaan garis itu dapat berupa persamaan fungsi permintaan dan penawaran.

Periksa letak kurva/penggal kurvanya

(a) Q + 2P - 10 = 0
Q = - 2P + 10
slopenya negatif (-), mungkin fungsi permintaan



Gambar 4.8

Oleh karena slopenya negatif (-), dan ada penggal kurvanya terletak di kuadran I, maka fungsi tersebut adalah fungsi permintaan.

(b) $2Q – 6P - 12 = 0$
$Q = 3P + 6$
Slopenya positif, maka fungsi tersebut adalah fungsi penawaran

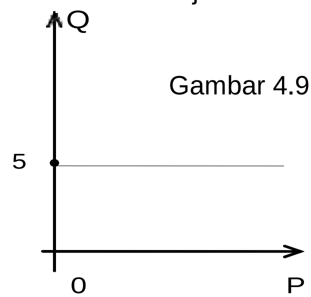
Letak kurva tidak perlu diperiksa, pasti ada kurva atau penggal kurva yang terletak di kuadran I.

(c) $Q – 2P = 0$
$Q = 2P$
Slopenya positif, maka fungsi tersebut adalah fungsi penawaran

Letak kurva tidak perlu diperiksa, pasti ada kurva atau penggal kurva yang terletak di kuadran I.

(d) $Q - 5 = 0$
$Q = 5$
Fungsi bilangan konstan, maka fungsi ini dapat berupa fungsi permintaan atau fungsi penawaran.

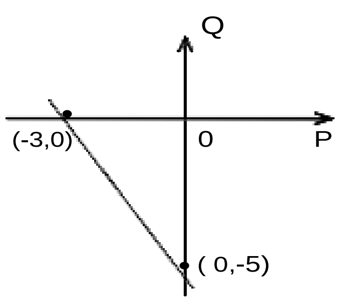
Letak kurva sudah jelas di kuadran I.



Gambar 4.9

(e) $3Q + 5P + 15 = 0$
$Q = - P - 5$
Slopenya negatif (-) mungkin fungsi permintaan.

Periksa letak kurvanya



Gambar 4.10

Walaupun slopenya negatif (-), akan tetapi tidak ada kurva /penggal kurva yang terletak di kwadran I, maka fungsi tersebut bukan merupakan fungsi permintaan.

4.4 Keseimbangan Pasar

Pengertian pasar dalam hal ini adalah pertemuan antara pembeli atau konsumen dengan penjual atau produsen guna melakukan transaksi (jual-beli) suatu barang atau jasa, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Keseimbangan pasar akan terjadi bila :

(1) Harga barang (jasa) yang ditawarkan oleh produsen (penjual) sama dengan harga yang diminta oleh konsumen (pembeli), atau

(2) Kuantitas barang (jasa) yang ditawarkan oleh produsen (penjual) sama dengan kuantitas barang diminta oleh konsumen (pembeli).

Secara geomatris titik potong antara fungsi permintaan suatu barang (jasa) dengan fungsi penawaran barang (jasa) tersebut merupakan titik keseimbangan pasar.

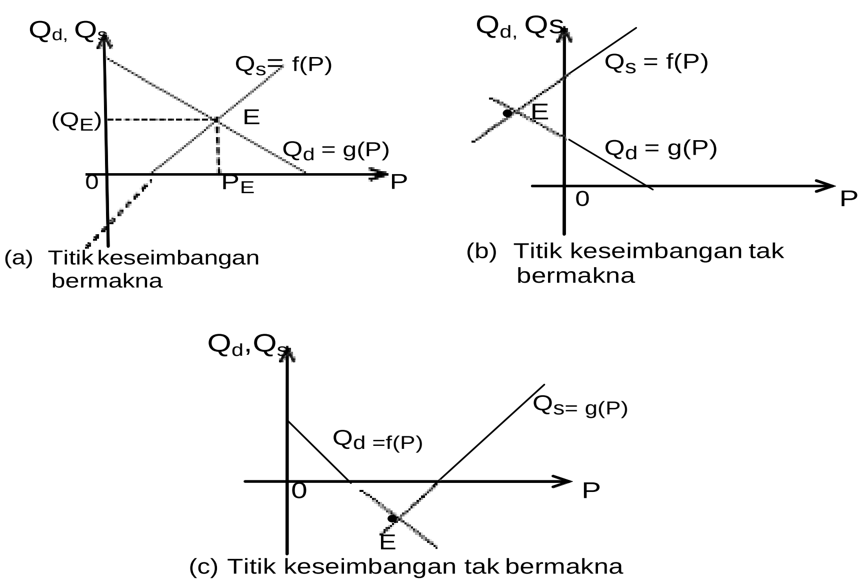
Keseimbangan pasar tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$Q_d = Q_s$$

atau

$$a - bP = c + dP \qquad (4.5)$$

Seperti telah dijelaskan dimuka, titik keseimbangan pasar yang mempunyai makna dalam analisis ekonomi hanyalah titik keseimbangan pasar yang terletak di kwadran pertama, seperti yang disajikan pada Gambar 4.11.



Gambar 4.11

Contoh 4 - 8

Fungsi permintaan suatu barang $Q_d = -\frac{1}{3}P + 10$ dan fungsi penawarannya $Q_s = \frac{2}{3}P - 5$. Q_d = kuantitas barang yang diminta, Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan dan P = harga tiap unit barang. Carilah titik keseimbangan pasar dan gambar grafiknya.

Penyelesaian

$$Q_d = -\tfrac{1}{3}P + 10 \qquad Q_s = \tfrac{2}{3}P - 5$$

Keseimbangan pasar akan terjadi bila :

$$Q_d = Q_s$$
$$-\tfrac{1}{3}P + 10 = \tfrac{2}{3}P - 5$$
$$10 + 5 = \tfrac{2}{3}P + \tfrac{1}{3}P$$
$$15 = P$$
$$P = P_E = 15$$

$P_E = 15$, disubstitusikan ke persamaan permintaan atau penawaran diperoleh nilai Q_E , sebagai berikut :

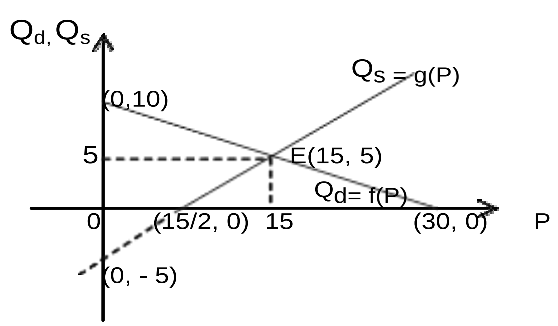
$$Q_d = -\tfrac{1}{3}P + 10$$
$$Q_E = -\tfrac{1}{3}(15) + 10 \text{ (gantikan P dengan } P_E)$$
$$Q_E = -5 + 10 = 5$$

Jadi, titik keseimbangan pasar adalah $E(P_E, Q_E) = E(15, 5)$

Gambar grafik

$$Q_d = -\tfrac{1}{3}P + 10 \qquad Q_s = \tfrac{2}{3}P - 5$$

P	0	30		**P**	0	15/2
Q_d	10	0		**Q_s**	- 5	0
(P, Q_d)	(0, 10)	(30, 0)		**(P, Q_s)**	(0, - 5)	(15/2, 0)



Gambar 4.12

Contoh 4 - 9

Berdasarkan hasil penelitian pasar permintaan dan penawaran terhadap sejenis barang, memberikan data sebagai berikut:

Harga per unit (P)	Kuantitas barang yang diminta (Q_d)	Kuantitas barang yang ditawarkan (Q_s)
3	7	4
5	5	8

Dari data tersebut di atas,
(a) Tentukanlah fungsi permintaan dan fungsi penawarannya.
(b) Hitunglah harga dan kuantitas keseimbangan pasar.
(c) Buatlah sketsa grafiknya dalam satu gambar.

Penyelesaian
(a) **Fungsi permintaan**

Jika $P_1 = 3$, maka $Q_1 = 7$ $\rightarrow$ $(P_1, Q_1) = (3, 7)$
Jika $P_2 = 5$, maka $Q_2 = 5$ $\rightarrow$ $(P_2, Q_2) = (5, 5)$

Per rumus 3.6 akan diperoleh fungsi permintaannya, sebagai berikut:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P-3}{5-3} = \frac{Q-7}{5-7}$$

$$\frac{P-3}{2} = \frac{Q-7}{-2} \quad \text{(kedua ruas dikalikan 2)}$$

$P - 3 = -(Q - 7)$
$P - 3 = - Q + 7$
$P = - Q + 10$

Jadi, $Q_d = - P + 10$

Fungsi penawaran

Jika $P_1 = 3$, maka $Q_1 = 4$ $\rightarrow$ $(P_1, Q_1) = (3, 4)$
Jika $P_2 = 5$, maka $Q_2 = 8$ $\rightarrow$ $(P_2, Q_2) = (5, 8)$

Per rumus 3.6 akan diperoleh fungsi penawarannya, sebagai berikut:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$\frac{P-3}{5-3} = \frac{Q-4}{8-4}$$

$$\frac{P-3}{2} = \frac{Q-4}{4} \quad \text{(Ke dua ruas dikalikan 4)}$$

$2(P - 3) = Q - 4$
$2P - 6 = Q - 4$
$Q = 2P - 2$

Jadi, $Q_s = 2P - 2$

(b) Keseimbangan pasar akan terjadi bila:

$Q_d = Q_s$
$- P + 10 = 2P - 2$
$12 = 3P$
$P = P_E = 4$

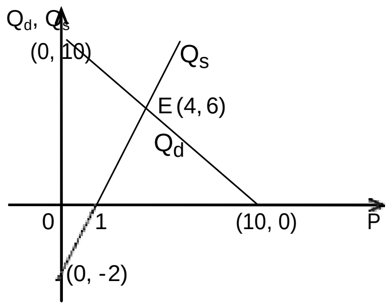
$Q_s = 2P - 2$
$Q_E = 2(4) - 2$ (gantikan P dengan P_E)
$Q_E = 6$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan pasar adalah $P_E = 4$ dan $Q_E = 6$

(c) Gambar grafik

$Q_d = - P + 10$ $\qquad\qquad$ $Q_s = 2P - 2$

P	0	10		P	0	1
Q_d	10	0		Q_s	- 2	0
(P, Q_d)	(0,10)	(10, 0)		(P, Q_s)	(0, -2)	(1, 0)



Gambar 4.13

4.5 Pengaruh Pajak Terhadap Keseimbangan Pasar

Pajak penjualan yang dikenakan pemerintah terhadap suatu barang mengakibatkan harga barang tersebut akan naik dan sebaliknya kuantitas barang yang diminta oleh konsumen akan turun. Jenis pajak yang kita bahas di bawah ini hanya pajak per unit dan pajak yang proporsional terhadap harga (pajak dalam bentuk prosenan). Besarnya pajak penjualan yang dipungut pemerintah terhadap barang yang terjual, akan mengeser kurva penawaran ke atas (ke kanan), dan kurva permintaannya tetap.

Kedua jenis pajak tersebut akan mempengaruhi harga melalui perubahan penawaran. Ini berarti fungsi permintaan tetap sedangkan fungsi penawarannya berubah.

■ Pajak t-per unit

Bila fungsi permintaan dan penawaran suatu barang semula (sebelum pajak), masing-masing Q_d = f(P) = a - bP dan Q_s = g(P) = c + dP, maka setelah diberlakukan pajak (setelah pajak) t per unit akan menjadi :

Fungsi permintaan (tetap) : $\boxed{Q_{dt} = Q_d = a - bP}$ (4.6)

Fungsi penawaran : (berubah) $\boxed{Q_{st} = c + d(P - t)}$ (4.7)

Selanjutnya keseimbangan pasar (titik equilibirum) akan terjadi bila :

$$\boxed{Q_{dt} = Q_{st}} \tag{4.8}$$

Untuk lebih jelasnya keadaan masing-masing sebelum pajak dan setelah pajak dapat diikhtisarkan seperti berikut:

Fungsi permintaan, penawaran dan keseimbangan pasar semula/sebelum dan setelah pajak t per-unit

	Sebelum pajak	Setelah pajak
Fungsi pemintaan	$Q_d = a - bP$	$Q_{dt} = a - bP$
Fungsi penawaran	$Q_s = c + dP$	$Q_{st} = c + d(P - t)$
Syarat keseimbangan	$Q_d = Q_s$	$Q_{dt} = Q_{st}$
Titik keseimbangan	$E(P_E, Q_E)$	$E_t(P_t, Q_t)$

(1) Perubahan kuantitas dan harga yang terjadi

(a) Perubahan kuantitas barang/jasa yang terjadi

$$\Delta Q = Q_E - Q_t \tag{4.9}$$

(b) Perubahan harga tiap unit barang/jasa yang terjadi

$$\Delta P = P_t - P_E \tag{4.10}$$

(2) Besarnya pajak yang ditanggung oleh produsen, dibebankan kepada konsumen dan besarnya pajak yang diterima oleh pemerintah.

(a) Besar pajak per unit yang dibebankan kepada konsumen, (t_k).

$$t_k = \Delta P = (P_t - P_E) \tag{4.11}$$

Besarnya pajak total yang dibebankan kepada konsumen (T_k)

$$T_k = (\Delta P)(Q_t) \tag{4.12}$$

(b) Besarnya pajak per unit yang ditanggung oleh produsen, (t_p).

$$t_p = (t - \Delta P) \tag{4.13}$$

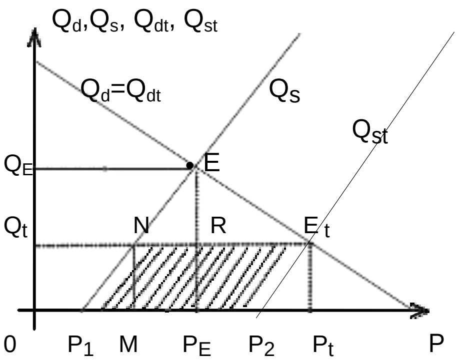
Besarnya pajak total yang ditanggung oleh produsen, (T_p)

$$T_p = (t - \Delta P)Q_t \tag{4.14}$$

(c) Pajak total (pendapatan) yang diterima oleh pemerintah (T)

$$T = tQ_t = T_k + T_p \tag{4.15}$$

Untuk lebih jelasnya keadaan (1), dan (2) di atas, di bawah ini disajikan keseimbangan pasar sebelum dan setelah pajak dalam satu gambar.



Gambar 4.14

Keterangan Gambar 4.14.

$P_t - P_E = \Delta P$

$P_2 - P_1 = P_t - M = t$

E = Titik keseimbangan pasar sebelum pajak.

E_t = Titik keseimbangan pasar setelah pajak.

P_E = Harga per unit barang keseimbangan pasar sebelum pajak.

P_t = Harga per unit barang kese - imbangan pasar setelah pajak

Q_E = Kuantitas barang keseim -bangan pasar sebelum pajak.

Q_t = Kuantitas barang keseim- bangan pasar setelah pajak.

- Pajak total yang diterima oleh pemerintah ditunjukkan oleh luas jajaran genjang p_1 N E_t $P_2 \approx$ luas segi empat M N $E_t P_t$.
- Pajak total yang dibebankan kepada konsumen ditunjukkan oleh luas segi empat P_t P_E R E_t.
- Pajak total yang ditanggung oleh produsen ditunjukkan oleh luas segi empat M N R P_E

■ Pajak Prosentase (r %)

Jika pajak yang dikenakan dalam bentuk prosentase terhadap harga jual tiap unit barang, maka harga jual setelah dikenakan pajak prosentase sebesar r, akan bertambah sebesar r.p, dan bentuk fungsi Q dalam P nya adalah sebagai berikut:

(1) Fungsi penawaran sebelum pajak : $Q_s = g(P) = c + dP$

Fungsi penawaran setelah pajak :

$$Q_{sr} = \qquad (4.16)$$

(2) Hubungan P dan P_r dinyatakan oleh

$$P = \frac{P_r}{1 + r} \qquad (4.17)$$

(3) Hubungan pajak per unit (t) dan pajak prosentase (r) adalah

$$t = r.P = \qquad (4.18)$$

atau

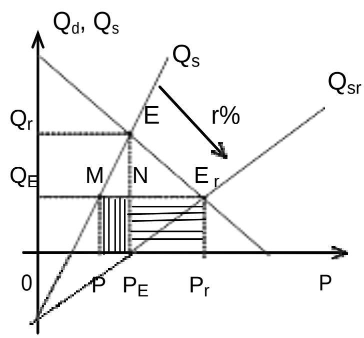
$$t = P_r - P$$

P_r = harga keseimbangan setelah pajak
P = harga barang yang ditawarkan sebelum kena pajak
r = besarnya pajak prosentase

(4) Total pajak yang diterima oleh pemerintah (T)

$$T = t.Q_r \tag{4.19}$$

Untuk lebih jelasnya hubungan antara t, P_r dan P lihat Gambar 4.15.



Gambar 4.15

- Pajak total yang diterima oleh pemerintah ditunjukkan oleh luas segi empat P_r P M E_r.
- Pajak total yang ditanggung oleh konsumen ditunjukkan oleh luas segi empat P_r P_E N E_r.
- Pajak total yang ditanggung oleh produsen ditunjukkan oleh luas segi empat P_E P M N.
- $t = P_r – P$

Contoh 4-10
Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang sebagai berikut:

Q_d = - 2P + 24 dan Q_s = 2P - 10

Pemerintah menarik pajak sebesar 1 tiap unit barang yang terjual.

Tentukanlah :
(a) Harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan sesudah pajak.
(b) Total pajak yang diterima oleh pemerintah.
Total pajak yang ditanggung oleh konsumen.
Total pajak yang ditanggung oleh produsen.
(c) Prosentase penurunan kuantitas barang yang terjual karena adanya pajak.
(d) Buatlah sketsa grafiknya.

Penyelesaian

(a) Keseimbangan pasar sebelum pajak.

$Q_d = -2P + 24$

$Q_s = 2P - 10$

Keseimbangan pasar akan terjadi, jika $Q_d = Q_s$

$\mathbf{Q_d = Q_s}$

$-2P + 24 = 2P - 10$

$4P = 34$

$P = P_E = \frac{17}{2}$

$Q_d = -2P + 24$

$= -\frac{17}{2}) + 24$ (ganti P dengan P_E)

$Q_E = -17 + 24 = 7$

Didapat $Q_E = 7$ dan $P_E = \frac{17}{2}$, dan titik keseimbangan sebelum pajak adalah $E(P_E, Q_E) = E(\frac{17}{2}, 7)$.

Keseimbangan pasar setelah pajak

$Q_{dt} = -2P + 24$ (fungsi permintaan tetap)

$Q_{st} = 2(P - t) - 10$ (fungsi penawaran berubah)

$= 2(P - 1) - 10$ (untuk t = 1)

$= 2P - 2 - 10$

$= 2P - 12$

Keseimbangan pasar terjadi jika, $Q_{dt} = Q_{st}$

$\mathbf{Q_{dt} = Q_{st}}$

$-2P + 24 = 2P - 12$

$36 = 4P$

$P = P_t = 9$

Jika $P_t = 9$ dimasukkan ke dalam fungsi Q_{dt} didapat harga Q_t sebagai berikut:

$Q_{dt} = -2P + 24$

$= -2(9) + 24$ (gantikan P dengan $P_t = 9$)

$= -18 + 24$

$Q_t = 6$

Didapat $Q_t = 6$, dan $P_t = 9$, dan titik keseimbangan sekarang/setelah pajak adalah $E_t(9, 6)$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $P_E = \frac{17}{2}$ dan $Q_E = 7$; harga dan kuantitas keseimbangan pasar setelah pajak adalah sebesar $P_t = 9$ dan $Q_t = 6$.

(b) Total pajak yang diterima oleh pemerintah (T)

$T = t.Q_t$

$= 1.6 = 6$

Total pajak yang ditanggung oleh konsumen (T_k)

$T_k = \Delta P_{.} Q_t$

$= (P_t - P_E).Q_t$
$= (9 - 8,5).6 = (0,5).6 = 3$

Total pajak yang ditanggung oleh produsen (T_p)
$T_p = (t - \Delta P\ ).Q_t$
$= (1 - \frac{1}{2}).6 = 3$

(c) Persentase (%) penurunan kuantitas barang yang terjual

$$\%\Delta Q = \left(\frac{Q_E - Q_t}{Q_E}\right).100\%$$

$$= \left(\frac{7-6}{7}\right)100\% = \frac{1}{7}.100\% = 14,28\%$$

(d) Gambar grafiknya

$Q_d = -2P + 24$

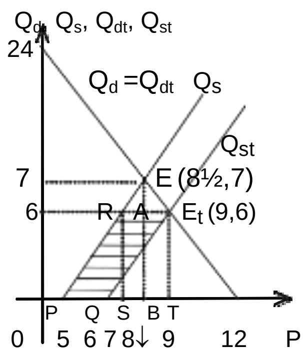
P	12	8,5	0
Q_d	0	7	24

$Q_s = 2P - 10$

P	5	6	7	8,5
Q_s	0	2	4	7

$Q_{st} = 2P - 12$

P	6	7	8	9	9,5
Q_{st}	0	2	4	6	7



Gambar 4.16

Total pajak yang diterima oleh pemerintah = luas jajaran genjang PQE_t R = luas segi empat $RSTE_t$ yaitu 6 satuan. Total pajak yang ditanggung oleh konsumen = luas segiempat $ABTE_t$ yaitu 3 satuan. Total pajak yang ditanggung oleh produsen = luas segi empat RABS yaitu 3 satuan

Contoh 4-11

Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang masing-masing :

$$Q_d = 25 - P \text{ dan } Q_s = -5 + \tfrac{1}{2}P$$

Jika terhadap setiap unit barang yang terjual dikenakan pajak sebesar 25%.
(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan yang baru dan sebelum dikenakan pajak.
(b) Tentukanlah total pajak yang diterima oleh pemerintah.
(c) Gambar grafik dalam satu gambar.

Penyelesaian

(a) Setelah adanya pajak (r = 25%) fungsi permintaan dan penawarannya sebagai berikut :

$$Q_{dr} = Q_d = 25 - P \qquad \text{(fungsi permintaan, tetap)}$$

$$Q_{sr} = d\left\{\frac{P}{(1+r)}\right\} + c \qquad \text{(fungsi penawaran, berubah)}$$

Oleh karena $d = \frac{1}{2}$, dan c = - 5 (lihat fungsi penawaran awal), maka

$$Q_{sr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{P}{(1+0{,}25)}\right\} - 5 = \frac{P}{2{,}5} - 5$$

Keseimbangan pasar setelah pajak terjadi bila $Q_{dr} = Q_{sr}$:

$$Q_{dr} = Q_{sr}$$

$$25 - P = \frac{P}{2{,}5} - 5$$

$$30 = \frac{P}{2{,}5} + P$$

$$= \frac{2}{5}P + P$$

$$30 = 1\frac{2}{5}P$$

$$30 = \frac{7}{5}P\ ,$$

$$P = P_r = \frac{150}{7}$$

Bila $P_r = \frac{150}{7}$, dimasukkan ke Q_{dr}, didapat harga Q_r sebagai berikut :

$$Q_{dr} = 25 - P$$

$$Q_r = 25 - \frac{150}{7} \qquad \text{(gantikan P dengan } P_r = \frac{150}{7}\text{)}$$

$$Q_r = \frac{175 - 150}{7}$$

$$= \frac{25}{7}$$

Harga dan kuantitas keseimbangan pasar setelah pajak (keseimbangan baru), adalah : $P_r = \frac{150}{7}$ dan $Q_r = \frac{25}{7}$ atau $E_r\left(\frac{150}{7}, \frac{25}{7}\right)$

Keseimbangan pasar sebelum pajak, bila $Q_d = Q_s$

$$Q_d = Q_s$$

$$25 - P = -5 + \frac{1}{2}P \qquad Q_d = 25 - P$$

$$30 = 1{,}5\,P \qquad Q_E = 25 - 20 \text{ (gantikan P dengan } P_E) = 5$$

$$P = P_E = 20 \qquad Q_E = 5$$

Harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum pajak adalah : P_E = 20 dan Q_E = 5 atau E(20, 5)

(b) Besarnya pajak total yang diterima oleh pemerintah (T).
Dihitung terlebih dahulu t, sebagai berikut.

$$t = r.\frac{P_r}{1+r} = 0{,}25\left(\frac{150/7}{1+0{,}25}\right) = \frac{30}{7}$$

Selanjutnya total pajak yang diterima oleh pemerintah (T)

$$T = t\,.Q_r$$

$$= \frac{30}{7}\,.\,\frac{25}{7} = \frac{750}{49}$$

(c) Gambar grafiknya

$Q_d = -P + 25$

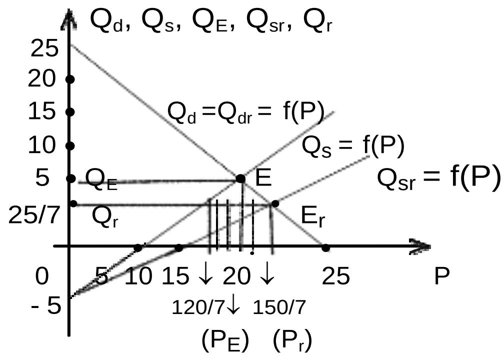
P	0	25
Q_d	25	0

$Q_s = \frac{1}{2}P - 5$

P	10	12	16	0
Q_s	0	1	3	-5

$Q_{sr} = \frac{P}{2{,}5} - 5$

P	12,5	15	20	0
Q_{sr}	0	1	3	- 5



Gambar 4.17

Luas segiempat yang diarsir, menunjukkan total pajak yang diterima oleh pemerintah.

4.6 Pengaruh Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar

Bila pemerintah memberikan subsidi terhadap barang/jasa yang dijual, maka harga per unit barang (jasa) tersebut akan turun dan sebaliknya kuantitas barang (jasa) yang diminta oleh konsumen akan naik. Besarnya subsidi yang diberikan oleh pemerintah per unit barang (jasa), akan menggeser kurva penawaran ke bawah sebesar subsidi tersebut, dan kurva permintaan tetap.

■ Subsidi s per unit

Ditulis kembali fungsi permintaan dan penawaran suatu barang semula (sebelum subsidi), sebagai berikut.

$Q_d = f(P) = a - bP$

$Q_s = g(P) = c + dP$

(1) Keseimbangan pasar sebelum subsidi.
Ditulis kembali, syarat keseimbangan pasar awal/sebelum subsidi adalah

$$Q_d = Q_s$$

(2) Keseimbangan pasar setelah subsidi.
Setelah pemerintah memberikan subsidi terhadap barang (jasa) yang dijual sebesar **s per unit**, maka fungsi permintaannya tetap, dan fungsi penawaran akan berubah sebagai berikut :

Fungsi permintaan : $$Q_{ds} = Q_d = a - bP \qquad (4.20)$$

Fungsi penawaran : $$Q_{ss} = c + d(P + s) \qquad (4.21)$$

Keseimbangan pasar akan dicapai bila :

$$Q_{ds} = Q_{ss} \qquad (4.22)$$

atau

$$a - bP = c + d(P + s) \qquad (4.23)$$

Titik keseimbangan pasar setelah subsidi adalah : $E_s\ (P_s, Q_s)$

(3) Perubahan harga per unit barang, perubahan kuantitas barang, subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan produsen, serta besarnya subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah, dapat dihitung sebagai berikut :

(a) Perubahan harga per-unit barang (ΔP)

$$\Delta P = P_E - P_s \qquad (4.24)$$

(b) Perubahan kuantitas barang diminta (ΔQ)

$$= Q_s - Q_E \tag{4.25}$$

(c) Besarnya subsidi per unit barang/jasa yang dinikmati konsumen (s_k)

$$s_k = (P_E - P_s) = \Delta P \tag{4.26}$$

Total subsidi yang dinikmati konsumen (S_k)

$$S_k = \Delta P.\, Q_s \tag{4.27}$$

(d) Besarnya subsidi per unit barang/jasa yang dinikmati produsen (s_p)

$$s_p = s - \Delta P \tag{4.28}$$

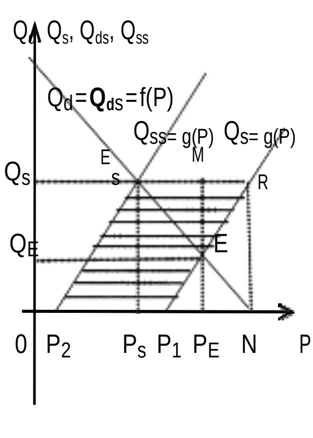
Total subsidi yang diterima oleh produsen (S_p)

$$S_p = (s - \Delta P).Q_s \tag{4.29}$$

(e) Total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah (S)

$$S = s.Q_s = S_k + S_p \tag{4.30}$$

Untuk lebih jelasnya, pada keadaan keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi disajikan pada Gambar 4.18:



Gambar 4.18

Keterangan Gambar 4.18.
E = Titik keseimbangan pasar sebelum subsidi
E_s = Titik keseimbangan pasar setelah subsidi
P_E = Harga per unit barang sebelum subsidi
P_s = Harga per unit barang setelah subsidi
$P_E - P_s = \Delta p$ = Perubahan harga per-unit barang atau besar subsidi per-unit yang dinikmati oleh konsumen
$N - P_s = P_1 - P_2 = s$ = Besar subsidi per-unit barang
Q_E = Kuantitas barang keseimbangan pasar sebelum subsidi
Q_s = Kuantitas barang keseimbangan pasar setelah subsidi
$Q_s - Q_E = \Delta Q$ = Perubahan kuantitas barang

- Total subsidi yang diberikan pemerintah (S) ditunjukkan oleh luas jajaran genjang $P_2\ E_s\ R\ P_1 \approx$ luas segi empat P_s Es R N yaitu, $(s.Q_s)$.
- Total subsidi yang dinikmati oleh konsumen ditunjukkan oleh luas segi empat $P_s\ E_s\ M\ P_E$ yaitu $(\Delta P).(Q_s)$
- Total subsidi yang dinikmati oleh produsen ditunjukkan oleh luas segi empat P_E M R N yaitu $(s - \Delta P).Q_s$

Contoh 4- 12

Fungsi permintaan suatu barang $Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$ dan fungsi penawarannya $Q_s = P - 3$. Jika pemerintah memberikan subsidi sebesar s = 3/4 tiap unit barang yang dijual.

(a) Tentukanlah besarnya total subsidi yang dinikmati oleh konsumen dan yang dinikmati oleh produsen.

(b) Tentukanlah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.

(c) Buatlah grafiknya.

Penyelesaian

Fungsi sebelum subsidi

$Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_s = P - 3$

Fungsi setelah subsidi s = $\frac{3}{4}$/unit

$Q_{ds} = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_{ss} = (P + s) - 3 = (P + \frac{3}{4}) - 3 = P - 2\frac{1}{4}$

(a) **Keseimbangan sebelum subsidi terjadi, jika** $Q_d = Q_s$:

$\mathbf{Q_d = Q_s}$

$5 - \frac{1}{2}P = P - 3$

$1\frac{1}{2}P = 8$

$\frac{3}{2}P = 8$

$P = P_E = \frac{16}{3}$

Selanjutnya substitusikan $P_E = \frac{16}{3}$, ke fungsi Q_d atau Q_s, untuk mendapatkan Q_E.

$Q_s = P - 3$

$Q_E = \frac{16}{3} - 3$ (gantikan P dengan P_E)

$= \frac{16 - 9}{3} = \frac{7}{3}$

Titik keseimbangan sebelum subsidi adalah $E(P_E, Q_E) = (\frac{16}{3}, \frac{7}{3})$.

Keseimbangan setelah adanya subsidi, **jika** $Q_{ds} = Q_{ss}$.

$Q_{ds} = Q_{ss}$

$5 - \frac{1}{2}P = P - 2\frac{1}{4}$

$1\frac{1}{2}P = 7\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}P = \frac{29}{4}$

$P = P_s = \frac{29}{6} = \frac{58}{12}$

$Q_s = \ldots ?$

Substitusikan $P_s = \frac{29}{6}$, ke fungsi Q_{ds} atau Q_{ss}, untuk mendapatkan Q_s

$Q_{ds} = 5 - \frac{1}{2}P$

$Q_s = 5 - \frac{1}{2}(\frac{29}{6})$ (gantikan P dengan Ps)

$= \frac{60 - 29}{12} = \frac{31}{12}$

Titik keseimbangan setelah subsidi adalah $E_s\ (P_s, Q_s) = E_s\ \frac{58}{12}, \frac{31}{12}$).

Total subsidi yang dinikmati oleh konsumen (S_k)

$$S_k = \Delta P.\ Q_s$$
$$= (P_E - P_s)\ .Q_s$$
$$= (\tfrac{16}{3} - \tfrac{58}{12}).\ \tfrac{31}{12}$$
$$= (\tfrac{64}{12} - \tfrac{58}{12}).\ \tfrac{31}{12} = (\tfrac{6}{12}).(\tfrac{31}{12}) = \tfrac{186}{144}$$

Jadi, total subsidi yang dinikmati oleh konsumen sebesar $\frac{186}{144}$

Total subsidi yang dinikmati oleh produsen (S_p)

$$S_p = (s - \Delta P).Q_s$$
$$= (\tfrac{3}{4} - \tfrac{6}{12}).\ \tfrac{31}{12})$$
$$= (\tfrac{9}{12} - \tfrac{6}{12}).\ \tfrac{31}{12} = (\tfrac{3}{12})(\tfrac{31}{12}) = \tfrac{93}{144}$$

Jadi, total subsidi yang dinikmati oleh produsen sebesar $\frac{93}{144}$

(b) Total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah (S)

$$S = S_k + S_p = s.Q_s$$
$$= \tfrac{186}{144} + \tfrac{93}{144} = \tfrac{279}{144}$$

(c) Gambar grafiknya

$Q_d = 5 - \frac{1}{2}P$

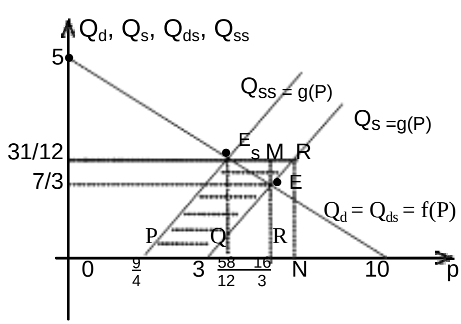
P	10	0
Q_d	0	5

$Q_s = P - 3$

P	3	4	$\frac{16}{3}$	6
Q_s	0	1	$\frac{7}{3}$	3

$Q_{ss} = P - 2\frac{1}{4}$

P	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{58}{12}$
Q_{ss}	0	1	2	$\frac{31}{12}$



Gambar 4.19

4.7 Keseimbangan Pasar Dua Jenis Barang

Terhadap barang yang mempunyai hubungan substitusi, kuantitas barang yang diminta atau ditawarkan selain tergantung dari harga barang itu sendiri, juga tergantung dari harga barang lainnya. Bila fungsi permintaan dan penawaran masing-masing barang tersebut adalah sebagai berikut :

■ Fungsi permintaan dan penawaran barang pertama

$$Q_{d1} = f(P_1, P_2) \qquad (4.31)$$

$$Q_{s1} = g(P_1, P_2) \qquad (4.32)$$

■ Fungsi permintaan dan penawaran barang kedua

$$Q_{d2} = f(P_1, P_2) \qquad (4.33)$$

$$Q_{s2} = g(P_1, P_2) \qquad (4.34)$$

Keseimbangan pasar akan tercapai/terjadi jika :

(1) Kuantitas barang pertama yang diminta sama dengan yang ditawarkan

$$Q_{d1} = Q_{s1} \qquad (4.35)$$

dan,

(2) Kuantitas barang kedua yang diminta sama dengan yang ditawarkan

$$Q_{d2} = Q_{s2} \qquad (4.36)$$

Harga dan kuantitas keseimbangan pasar untuk masing-masing barang (barang pertama dan kedua) yaitu $P_{1(E)}$, $Q_{1(E)}$ dan $P_{2(E)}$, $Q_{2(E)}$ dapat dicari dengan menyelesaikan secara simultan (4.35) dan (4.36) atau menyelesaikan secara simultan (4.31), (4.32), (4.33) dan (4.34). P_1 dan P_2 adalah harga per unit barang pertama dan kedua. Q_1 dan Q_2 adalah kuantitas barang pertama dan kedua. Model analisis keseimbangan pasar dua jenis barang ini dapat diperluas untuk lebih dari dua jenis barang (n > 2) jenis barang

Contoh 4 - 13

Permintaan dan penawaran dua jenis barang yang memiliki hubungan substitusi masing- masing ditunjukkan oleh pasangan fungsi di bawah ini:

Jenis Barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	$Q_{d1} = 100 - 2P_1 + 3P_2$	$Q_{s1} = 2P_1 - 4$
Barang kedua	$Q_{d2} = 150 + 4P_1 - P_2$	$Q_{s2} = 3P_2 - 6$

Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang.

Penyelesaian

$Q_{d1} = 100 - 2P_1 + 3P_2$ (1)

$Q_{s1} = 2P_1 - 4$ (2)

$Q_{d2} = 150 + 4P_1 - P_2$ (3)

$Q_{s2} = 3P_2 - 6$ (4)

Dari (1) dan (2) didapat:

$$100 - 2P_1 + 3P_2 = 2P_1 - 4$$

$$4P_1 - 3P_2 = 104 \quad (5)$$

Dari (3) dan (4) didapat:

$$150 + 4P_1 - P_2 = 3P_2 - 6$$

$$-4P_1 + 4P_2 = 156 \quad (6)$$

Dari(5) dan (6) didapat :

$$\begin{array}{r} 4P_1 - 3P_2 = 104 \\ -4P_1 + 4P_2 = 156 \\ \hline P_2 = P_{2(E)} = 260 \end{array} +$$

Selanjutnya:

Bila $P_{2(E)} = 260$ dimasukkan ke (5) atau (6) akan diperoleh $P_{1(E)} = 221$

Bila $P_{2(E)} = 260$ dan $P_{1(E)} = 221$ dimasukkan ke (1) atau $P_{1(E)} = 221$ dimasukkan ke (2) diperoleh $Q_{1(E)} = 438$

Bila $P_{2(E)} = 260$ dan $P_{1(E)} = 221$ dimasukkan ke (3) atau $P_{2(E)} = 260$ dimasukkan ke (4) diperoleh $Q_{2(E)} = 774$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan barang pertama adalah $P_{1(E)} = 221$ dan $Q_{1(E)} = 438$. Sementara itu, harga dan kuantitas keseimbangan barang kedua adalah $P_{2(E)} = 260$ dan $Q_{2(E)} = 774$

4.8 Pengaruh Pajak dan Subsidi Terhadap Keseimbangan Dua Jenis Barang

Pengenaan pajak dan pemberian subsidi oleh pemerintah terhadap salah satu barang yang memilki hubungan substitusi, dapat mempengaruhi harga dan kuantitas barang itu sendiri, dan dapat juga mempengaruhi harga dan kuantitas barang lainnya yang diminta/ditawarkan.Terhadap kedua jenis barang itu dapat saja keduanya dikenakan pajak atau keduanya barang diberikan subsidi atau salah satunya dikenakan pajak dan barang lainnya diberikan subsidi. Seperti analisis pengaruh pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar satu jenis barang, fungsi permintaan pembeli/konsumen dianggap tetap, yang berubah hanyalah fungsi penawarannya.

Contoh 4-14

Permintaan dan penawaran dua jenis barang yang memiliki hubungan substitusi ditunjukkan oleh pasangan fungsi berikut ini

Jenis barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	$Q_{d1} = 5 - P_1 + P_2$	$Q_{s1} = P_1 + P_2 - 5$
Barang kedua	$Q_{d2} = 10 - P_2 - P_1$	$Q_{s2} = 2P_2 - P_1 - 2$

Pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar 1/2 per unit untuk barang pertama, dan 1 per unit terhadap barang yang kedua.Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang sebelum dan setelah pemerintah mengenakan pajak. Hitunglah total pajak yang diterima oleh pemerintah.

Penyelesaian

$Q_{d1} = 5 – P_1 + P_2$ (1)

$Q_{s1} = P_1 + P_2 - 5$ (2)

$Q_{d2} = 10 - P_2 - P_1$ (3)

$Q_{s2} = 2P_2 - P_1 - 2$ (4)

Keseimbangan sebelum pajak

Harga dan kuantitas keseimbangan pasar untuk barang pertama dan kedua dicari dengan penyelesaian simultan (1), (2), (3) dan (4) sebagai berikut :

Dari (1) dan (2) didapat :

$$5 - P_1 + P_2 = P_1 + P_2 - 5$$
$$2P_1 = 10$$
$$P_1 = P_{1(E)} = 5$$

Dari (3) dan (4) didapat:

$$10 - P_2 - P_1 = 2P_2 - P_2 - 2$$
$$12 = 3P_2$$
$$P_2 = P_{2(E)} = 4$$

Selanjutnya, bila $P_{1(E)} = 5$ dan $P_{2(E)} = 4$ dimasukkan ke (1) atau (2) diperoleh $Q_{1(E)}$, sebagai berikut:

$$Q_{d1} = - P_1 + P_2 + 5$$
$$Q_{1(E)} = - 5 + 4 + 5$$
$$Q_{1(E)} = 4$$

Dan, $P_{1(E)} = 5$ dan $P_{2(E)} = 4$ dimasukkan ke (3) atau (4) diperoleh $Q_{2(E)}$, sebagai berikut:

$$Q_{d2} = -P_2 - P_1 + 10$$
$$Q_{2(E)} = -4 - 5 + 10$$
$$Q_{2(E)} = 1$$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum pajak untuk barang pertama adalah $P_{1(E)} = 5$ dan $Q_{1(E)} = 1$. Untuk barang kedua adalah $P_{2(E)} = 4$ dan $Q_{2(E)} = 1$.

Keseimbangan pasar setelah pajak

Fungsi permintaan kedua jenis barang itu tetap, yang berubah fungsi penawarannya, sebagai berikut:

$Q_{d1(t)} = 5 - P_1 + P_2$	(tetap)	(1.1)
$Q_{s1(t)} = (P_1 - 1/2) + P_2 - 5 = P_1 + P_2 - 5\frac{1}{2}$	(berubah)	(2.1)
$Q_{d2(t)} = 10 - P_2 - P_1$	(tetap)	(3.1)
$Q_{s2(t)} = 2(P_2 - 1) - P_1 - 2 = 2P_2 - P_1 - 4$	(berubah)	(4.1)

Dari (1.1) dan (2.1) didapat:

$$5 - P_1 + P_2 = P_1 + P_2 - 5\frac{1}{2}$$
$$10\frac{1}{2} = 2P_1$$
$$P_1 = \frac{21}{4} \rightarrow P_1 = P_{1(t)} = \frac{21}{4}$$

Dari (3.1) dan (4.1) didapat:

$$10 - P_2 - P_1 = 2P_2 - P_1 - 4$$
$$3P_2 = 14$$
$$P_2 = \frac{14}{3} \rightarrow P_2 = P_{2(t)} = \frac{14}{3}$$

Selanjutnya, bila $P_{1(t)} = \frac{21}{4}$ dan $P_{2(t)} = \frac{14}{3}$ dimasukkan ke (2.1) atau ke (1.1) diperoleh $Q_{1(t)}$, sebagai berikut:

$$Q_{d1(t)} = P_1 + P_2 - 5\frac{1}{2}$$
$$= \frac{21}{4} + \frac{14}{3} - \frac{11}{2}$$
$$= \frac{63 + 56 - 66}{12} = \frac{53}{12}$$
$$Q_{d1(t)} = Q_{1(t)} = \frac{53}{12}$$

Bila $P_{1(t)} = \frac{21}{4}$ dan $P_{2(t)} = \frac{14}{3}$ dimasukkan ke (4.1) diperoleh $Q_{2(t)}$, sebagai berikut:

$$Q_{s2(t)} = 2P_2 - P_1 - 4$$

$$= 2\ \frac{14}{3})\ \frac{21}{4} - 4$$

$$= \frac{28}{3} - \frac{21}{4} - 4$$

$$= \frac{112}{12} - \frac{63}{12} - 4$$

$$= \frac{49}{12} - 4 = \frac{49-48}{12} = \frac{1}{12}$$

$$Q_{s2(t)} = Q_{2(t)} = \frac{1}{12}$$

Jadi, harga dan kuantitas keseimbangan pasar setelah dikenakan pajak untuk barang pertama adalah $P_{1(t)} = \frac{21}{4}$ dan $Q_{1(t)} = \frac{53}{12}$. Untuk barang kedua adalah $P_{2(t)} = \frac{14}{3}$ dan $Q_{2(t)} = \frac{1}{12}$

Total pajak yang diterima oleh pemerintah (T) adalah penjumlahan dari hasil kali pajak per unit masing-masing dengan kuantitas masing-masing barang setelah adanya pajak.

$$T = t_1 . Q_{1(t)} + t_2 . Q_{2(t)}$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{53}{12} + \frac{1}{12})$$

$$= \frac{53}{24} + \frac{2}{24}$$

$$= \frac{55}{24}$$

4.9 Analisis Pulang Pokok

4.9.1 Fungsi Penerimaan Total

Penerimaan total (total revenu = total penjualan) bagi sebuah perusahaan adalah fungsi dari kuantitas barang yang dijual (diproduksi). Besarnya (nilainya) merupakan hasil kali antara kuantitas barang yang diproduksi (dijual) dengan harga barang per unitnya. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R = f(Q) = PQ \qquad (4.37)$$

R = total revenu (total penerimaan, total penjualan), Q = kuantitas barang yang diproduksi/ terjual dan P = harga per unit barang.

■ **Penerimaan rata-rata (*Average Revenu*)**

Average Revenu (AR) adalah penerimaan total dibagi kuantitas barang yang diproduksi (dijual).

$$AR = \quad P \tag{4.38}$$

Jadi, penerimaan rata-rata sama dengan harga per unit barang yang diproduksi (dijual).

4.9.2 Fungsi Biaya

Biaya total yang dikeluarkan untuk memproduksi suatu barang akan semakin besar bila kuantitas produksinya semakin banyak. Ini berarti biaya total adalah fungsi dari kuantitas barang yang diproduksi. Besarnya biaya total ini merupakan hasil kali antara banyaknya barang yang diproduksi dengan biaya rata-rata per unit, yang dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} C &= f(Q) \\ &= Q \end{aligned} \tag{4.39}$$

C = biaya total (total cost), Q = kuantitas barang yang diproduksi.
C = biaya rata- rata per unit barang.

Biaya total dapat dibagi atas dua kelompok umum yaitu **biaya tetap** *(fixed cost)* dan **biaya variabel** (v*ariable cost*). Biaya tetap adalah biaya yang senantiasa tetap besarnya, tidak tergantung dari banyak sedikitnya barang yang diproduksi, seperti antara lain : gaji pegawai, sewa, bunga uang, penyusutan. Sementara biaya variabel adalah biaya yang besarnya dapat berubah-ubah tergantung dari banyak sedikitnya barang yang diproduksi, seperti antara lain: upah tenaga kerja, bahan baku, biaya advertensi.

Jadi, biaya variabel inilah yang sebenarnya merupakan fungsi dari banyaknya barang yang diproduksi, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} VC &= f(Q) \\ &= v.Q \end{aligned} \tag{4.40}$$

v = biaya variabel per unit barang, Q = kuantitas barang yang diproduksi.

Dikaitkan dengan biaya tetap (*fixed cost*) dan biaya variabel (v*ariabel cost*) maka biaya total (*total cost*) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} C &= FC + VC \\ &= FC + f(Q) \end{aligned} \tag{4.41}$$

■ **Biaya rata-rata *(Average Cost)***

Biaya rata-rata atau biaya per unit (AC) adalah hasil bagi biaya total dengan kuantitas barang yang diproduksi.

$$AC = \tag{4.42}$$

4.9.3 Keuntungan, Kerugian dan Pulang Pokok

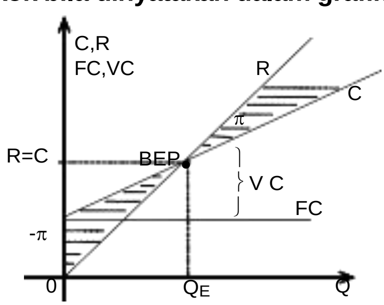
Bila total revenu (total penjualan) lebih besar dari total biaya, maka perusahaan tersebut mendapat untung/laba. Bila total revenu lebih kecil dari total biaya, maka perusahaan tersebut menderita kerugian (keuntungan negatif), dan apabila total revenu sama dengan total biaya maka perusahaan tersebut berada dalam keadaan pulang pokok. Dalam keadaan pulang pokok perusahaan tidak mendapat laba dan tidak pula menderita kerugian. Secara grafis titik potong antara kurva total revenue (R) dan biaya total biaya (C) menunjukkan titik pulang pokok (*Break Even Point*).

Persamaan yang menyatakan hubungan antara laba, total revenu dan total biaya adalah:

$$= R - C \qquad (4.43)$$

R = Total revenu/ total penjualan, C = biaya total dan π = Laba. Bila π positif = laba, dan bila π negatif = rugi, dan bila π = 0 keadaan pulang pokok.

Keadaan pulang pokok bila dinyatakan dalam grafik, seperti Gambar 4.20.



Gambar 4.20

■ Titik Pulang Pokok (BEP)

Titik pulang pokok (titik impas) terjadi bila penerimaan total (R) yang diterima perusahaan **sama dengan** biaya total (C) yang dikeluarkan oleh perusahaan, yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$R = C$$
$$R = FC + VC$$
$$R - VC = FC$$
$$P.Q - vQ = PC$$
$$Q(P - v) = FC$$

$$Q_E = \qquad (4.44)$$

VC	= total variabel cost = total biaya variabel.
v	= biaya variabel per unit.
P	= harga jual per unit produk .
Q_E	= kuantitas pulang pokok/impas.

FC = total biaya tetap.
R = penerimaan total/total penjualan.
(P - v) = profit margin atau kontribusi.

Contoh 4 - 15
Biaya total sebuah perusahaan yang memproduksi sejenis barang ditunjukkan oleh C = 30.000 + 100Q dan penerimaan totalnya R = 200Q
Pertanyaan
(a) Berapa unit perusahaan tersebut berproduksi agar berada pada posisi impas (pulang pokok)?
(b) Rugi atau untungkah bila perusahaan tersebut berproduksi 400 unit?

Penyelesaian
(a) $Q_E = \ldots?$

Keadaan pulang pokok akan tercapai bila penerimaan total sama dengan biaya total

$$C = R$$
$$30.000 + 100Q = 200Q$$
$$30.000 = 100Q$$
$$Q = 300$$

Jadi, agar perusahaan tersebut berada pada posisi pulang pokok (impas), seharusnya berproduksi sebanyak 300 unit.

(b) Bila Q = 400, maka π postif atau negatif?
Bila Q = 400, maka
C = 30.000 + 100Q
= 30.000 + 100 (400) = 70.000

R = 200Q
= 200(400) = 80.000

Oleh karena R = 80.000 > C = 70.000, maka perusahaan tersebut memperoleh keuntungan (π yang positif).

Contoh 4 - 16
Sejenis barang diproduksi dengan biaya tetap Rp 5.000,00, biaya variabel per unit (v) Rp 20,00 dan harga jual nya (P) sebesar Rp 30,00 per unit.
(a) Tentukanlah kuantitas impas (kuantitas pulang pokok).
(b) Agar diperoleh laba sebesar Rp 2.500,00, berapa unit sebaiknya berproduksi?

Penyelesaian
(a) $Q_E = \ldots?$

$FC = 5.000$
$VC = Q.v$
$= Q.20 = 20Q$

$R = Q.P$
$= Q.30$
$= 30Q$

$C = VC + FC = 20Q + 5.000$

Keadaan pulang pokok tercapai bila, C = R.

$C = R$
$5.000 + 20Q = 30Q$
$Q = 500$

atau

$$Q_E = \frac{FC}{(P - v)}$$
$$= \frac{5000}{(30 - 20)} = 500$$

Jadi, kuantitas impas sebanyak 500 unit

(b) Bila Laba (π) = 2.500, Q = ...?

$\pi = R - C$
$2.500 = 30Q - (5.000 + 20Q)$
$7.500 = 10Q$
$Q = 750$

Jadi, agar diperoleh laba Rp 2.500,00 seharusnya berproduksi sebanyak 750 unit.

Contoh 4 - 17

Sebuah perusahaan menjual hasil produksinya Rp 10,00 per unit. Biaya tetap yang dikeluarkan untuk berproduksi sebesar Rp 4.000,00. Sementara biaya variabel diperkirakan 40% dari penerimaan total. Berapakah biaya total apabila berproduksi 5.000 unit?

Penyelesaian

$FC = 4.000$
$P = 10$
$VC = 40\%(R) = 0,4R = 0,4(PQ)$
$= 0,4\ (10Q) = 4Q$

Bila Q = 5.000, C = ... ?

$C = FC + VC$
$= 4.000 + 4Q$
$= 4.000 + 4.(5.000)$
$= 24.000$

Jadi, apabila perusahaan tersebut berproduksi sebanyak 5.000 unit, maka biaya total yang dikeluarkan sebanyak Rp 24.000,00

4.10 Penentuan Pendapatan Nasional

4.10.1 Fungsi Konsumsi, Tabungan, Investasi, Impor dan Pajak

■ **Fungsi Konsumsi**

Dalam jangka pendek fungsi konsumsi dapat dianggap linear. Besar kecilnya konsumsi nasional suatu negara tergantung dari pendapatan nasionalnya. Hubungan konsumsi dan pendapatan nasional secara umum dapat dinyatakan sebagai :

$$C = f(Y) \qquad (4.45)$$

dan, dalam bentuk linearnya adalah sebagai berikut :

$$C = C_0 + bY \qquad (4.46)$$

dan menurut Keynes, pendapatan nasional suatu negara terdiri dari konsumsi dan tabungan nasional, yang dapat dinyatakan sebagai, berikut :

$$Y = C + S \qquad 4.47)$$

■ **Fungsi Tabungan.**

Tabungan dari suatu negara juga tergantung dari besar kecilnya pendapatan nasionalnya. Secara umum fungsi tabungan dapat dinyatakan sebagai,

$$S = f(Y) \qquad (4.48)$$

dan, bentuk linearnya dapat diturunkan dengan memasukkan C dalam rumus (4.46) ke rumus (4.47) didapat,

$$S = -C_0 + (1 - b)Y \qquad (4.49)$$

C = Konsumsi nasional
Y = Pendapatan nasional.
S = Tabungan nasional
C_0 = Kosumsi otonom yaitu besarnya konsumsi nasional apabila pendapatan nasional nol (merupakan konstanta).
b = $(\Delta C/\Delta Y)$ = *Marginal Propensity to Consume (MPC)* yaitu besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan 1 unit pendapatan nasional.
(1- b) = (1 - MPC) = MPS = *Marginal Propensity to saving (MPS)* yaitu besarnya tambahan tabungan sebagai akibat adanya tambahan 1 unit pendapatan nasional.

■ **Fungsi Investasi**

Hubungan antara investasi (I) dengan tingkat suku bunga (i) dinyatakan oleh fungsi berikut:

$$\boxed{I = f(i)} \qquad (4.50)$$

dan bentuk linearnya adalah sebagai berikut:

$$\boxed{I = I_0 + bi} \qquad (4.51)$$

I_0 adalah investasi otonom, dan b adalah koefisien suku bunga i.

■ **Fungsi Impor**

Hubungan antara impor (M) dengan pendapatan nasional (Y) adalah sebagai berikut:

$$\boxed{M = f(Y)} \qquad (4.52)$$

dan bentuk linearnya adalah sebagai berikut:

$$\boxed{M = M_0 + mY} \qquad (4.53)$$

M = impor, M_0 = impor bila Y = 0 (impor yang tidak terpengaruh pendapatan nasional), m = *marginal propencity to import*.

■ **Fungsi Pajak**

Hubungan antara pajak (T) dengan pendapatan nasional (Y) adalah sebagai berikut:

$$\boxed{T = f(Y)} \qquad (4.54)$$

dan bentuk linearnya adalah sebagai berikut:

$$\boxed{T = T_o + hY} \qquad (4.55)$$

T = pajak, T_0 = impor bila Y = 0 (pajak yang tidak terpengaruh pendapatan nasional), h = *marginal rate of taxation*.

4.10.2 Pendapatan Nasional dan Pendapatan Disposabel

Pendapatan nasional. Pendapatan nasional pada dasarnya merupakan total dari pendapatan semua sektor didalam suatu negara yaitu sektor rumah tangga, sektor badan usaha dan sektor pemerintah. Sementara **pendapatan disposabel** (*disposable income*) adalah pendapatan nasional yang secara nyata dapat dibelanjakan oleh masyarakat. Pendapatan disposabel adalah pendapatan nasional setelah dikurangi pajak dan ditambah pembayaran alihan. Hubungan antara pendapatan nasional dan pendapatan disposabel suatu negara adalah sebagai berikut:

$$Y_d = Y - T + R \tag{4.56}$$

Y_d = Pendapatan disposabel,
Y = Pendapatan nasional,
T = Pajak dan R = pembayaran alihan (*transfer payment*).

Oleh karena pendapatan disposabel adalah pendapatan nasional yang siap dibelanjakan, maka konsumsi (C) merupakan fungsi dari pendapatan disposabel (Y_d), yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C &= f(Y_d) \\ &= C_o + bY_d \end{aligned} \tag{4.57}$$

4.10.3 Pendapatan Nasional Keseimbangan

Syarat dari pendapatan nasional dalam keseimbangan adalah:

Penawaran agregat (Pendapatan agregat)	=	Permintaan agregat (Pengeluaran agregat)

(4.58)

1) Perekonomian dua sektor

Perekonomian dua sektor juga disebut perekonomian tertutup sederhana. Dalam perekonomian dua sektor tidak terdapat peran pemerintah (transaksi pemerintah) dan hubungan luar negeri (perdagangan dengan negara lain). Unsur-unsur pendapatan nasional di sini adalah konsumsi, tabungan dan investasi.

Penawaran agregat	Permintaan agregat
Y = C + S	Y = C + I

Syarat terjadinya keseimbangan pendapatan nasional adalah

$$C + S = C + I$$

atau

$$S = I \tag{4.59}$$

(2) Perekonomian tiga sektor

Dalam perekonomian tiga sektor, terdapat peran pemerintah (transaksi pemerintah), namun hubungan luar negeri (perdagangan dengan negara lain) tidak ada. Unsur-unsur pendapatan nasional adalah

Penawaran agregat	Permintaan agregat
$Y = C + S + T - R$	$Y = C + I + G$

Syarat terjadinya keseimbangan pendapatan nasional adalah

$$\begin{gathered} C + S + T - R = C + I + G \\ S + T - R = I + G \end{gathered} \tag{4.60}$$

G = pengeluaran pemerintah

(3) Perekonomian empat sektor

Perekonomian empat sektor juga disebut perekonomian terbuka.Dalam perekonomian ini terdapat peran pemerintah (transaksi pemerintah), dan hubungan luar negeri (perdagangan dengan negara lain). Unsur-unsur pendapatan nasional adalah

Penawaran agregat	Permintaan agregat
$Y = C + S + T - R$	$Y = C + I + G + (X - M)$

Syarat terjadinya keseimbangan pendapatan nasional adalah

$$\begin{gathered} C + S + T - R = C + I + G + (X - M) \\ S + T - R = I + G + (X - M \end{gathered} \tag{4.61}$$

dengan,

X = ekspor, M = impor, (X - M) = ekspor bersih, dan disini berlaku

$I = I_0$, $G = G_0$, $X = X_0$, $R = R_0$.

$T = T_0 + hY$

$M = M_0 + mY$

Contoh 4-18

Konsumsi masyarakat sebuah negara ditunjukkan oleh, $C = 40 + 0{,}4\,Y$

(a) Berapakah besar konsumsinya, jika pendapatan nasionalnya 200?

(b) Tentukanlah fungsi tabungannya.

Penyelesaian

(a) Bila Y = 200, maka C = . . . ?

$$\begin{aligned} C &= 40 + 0{,}4Y \\ &= 40 + 0{,}4\,(200) \\ &= 40 + 80 = 120 \end{aligned}$$

Jadi, besar konsumsi masyarakat negara tersebut bila pendapatan nasionalnya 200 adalah 120.

(b) Fungsi tabungan, S = f(Y) ?
Telah diketahui, $C_0 = 40$, $b = 0,4$.

maka,
$$S = -C_0 + (1 - b)Y$$
$$= -40 + (1 - 0,4)Y$$
$$= -40 + 0,6Y$$

Jadi, fungsi tabungannya adalah $S = f(Y) = -40 + 0,6Y$

Contoh 4 - 19
Untuk perekonomian suatu negara secara keseluruhan konsumsi merupakan fungsi linear terhadap pendapatan nasionalnya. Pada setiap tingkat pendapatan, konsumsi sama dengan 4 miliar (dalam satuan uang negara tersebut) ditambah 80% dari pendapatan nasionalnya.

Pertanyaan
(a) Tentukanlah fungsi konsumsinya.
(b) Tentukanlah besar konsumsi agregat apabila pendapatannya 30 miliar.
(c) Buatlah grafiknya untuk butir (a)

Penyelesaian
(a) Fungsi konsumsi, C = f(Y)?
$C_0 = 4$
$b = \Delta C / \Delta Y = 80\% = 0,8$

maka,
$C = C_0 + bY$
$C = f(Y) = 4 + 0,8\,Y$

Jadi, fungsi konsumsinya adalah $C = 4 + 0,8Y$

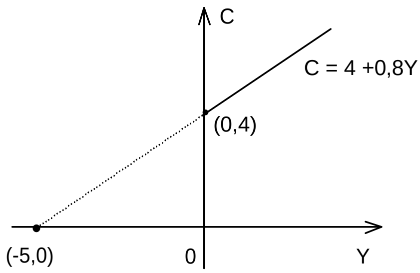
(b) Bila Y = 30, C = ... ?
$$C = 4 + 0,8\,Y$$
$$= 4 + 0,8\,(30)$$
$$= 4 + 24 = 28$$

Jadi, bila pendapatan nasional negara tersebut 30 miliar, maka besarnya konsumsinya adalah 28 miliar.

(c) Gambar grafiknya

$C = 4 + 0,8\,Y$

Y	0	- 5
C	4	0
(Y, C)	(0, 4)	(- 5, 0)



Gambar 4.20

Contoh 4 - 20
Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh $C = 15 + 0{,}6\ Y_d$
Berapakah konsumsi agregat bila pendapatan disposabelnya 10 miliar?

Penyelesaian

$C = ...?$ Bila $Y_d = 10$

$$C = 15 + 0{,}6Y_d$$
$$= 15 + 0{,}6(10) = 21$$

Jadi, konsumsi agregat bila pendapatan disposabelnya 10 miliar = 21 miliar.

Contoh 4 - 21
Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara adalah : $C = 40 + 0{,}8Y_d$. Jika pemerintah menerima pembayaran pajak sebesar 12 dari masyarakat, tapi juga memberikan pembayaran alihan sebesar 4 kepada warga masyarakatnya, berapa besar konsumsi masyarakat negara bila pendapatan nasionalnya sebesar 300.

Penyelesaian

$C = 40 + 0{,}8\ Y_d$
$T = 12$; $R = 4$

maka,

$$Y_d = Y - T + R$$
$$= Y - 12 + 4$$
$$= Y - 8$$

Untuk $Y = 300$, didapat,

$$Y_d = Y - 8,$$
$$= 300 - 8 = 292$$

Selanjutnya konsumsinya dapat dihitung sebagai berikut :

$$C = 40 + 0{,}8\ Y_d$$
$$= 40 + 0{,}8\ (292)$$
$$= 40 + 233{,}6$$
$$= 273{,}6$$

Jadi, konsumsi masyarakat negara tersebut bila pendapatan nasionalnya 300 adalah 273,6.

Contoh 4 - 22
Tahun lalu pendapatan nasional suatu negara sebesar 1.000. Pengeluaran untuk konsumsinya sebesar 900. Tahun ini pendapatan nasionalnya meningkat hingga mencapai 1200, sementara pengeluaran konsumsinya juga meningkat hingga mencapai 1.040. Tentukanlah fungsi konsumsi dan tabungannya.

Penyelesaian
C = f(Y)?, dan S = f(Y)?
$(Y_1, C_1) = (1.000, 900)$ dan $(Y_2, C_2) = (1.200, 1.040)$

Per rumus 3.6, fungsi konsumsi dan tabungannya dapat ditentukan sebagai berikut

$$\frac{Y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}$$

$$\frac{Y - 1.000}{1.200 - 1.000} = \frac{C - 900}{1.040 - 900}$$

$$\frac{Y - 1.000}{200} = \frac{C - 900}{140}$$

$$\frac{140}{200}(Y - 1.000) = C - 900$$

$$0,7Y - 700 = C - 900$$

$$C = f(Y) = 200 + 0,7Y.$$

$$S = f(Y) = -C_o + (1 - b)Y$$
$$= -200 + 0,3Y$$

Jadi, fungsi konsumsinya adalah C = 200 + 0,7Y.
Fungsi tabungannya adalah S = - 200 + 0,3Y

Contoh 4 - 23
Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara (perekonomian dua sektor) adalah : C = 100 + 0,75Y. Sementara investasinya sebesar Rp 400 miliar. Tentukanlah pendapatan nasional keseimbangannya.

Penyelesaian
Per rumus (4.59) pendapatan nasional keseimbangan dapat dihitung sebagai berikut:

$$S = I$$
$$Y - C = I$$
$$Y - (100 + 0,75Y) = 400$$
$$-100 + 0,25Y = 400$$
$$0,25Y = 500$$
$$Y = 2.000$$

Jadi, pendapatan nasional keseimbangan sebesar Rp 2.000 miliar.

Contoh 4-24
Perekonomian suatu negara merupakan perekonomian tiga sektor. Konsumsi masyarakatnya mengikuti fungsi : $C = 600 + 0,75Y_d$. Investasi yang terjadi mencapai Rp 400 triliun, pengeluaran pemerintah sebesar Rp 800 triliun, pembayaran alihan kepada masyarakat sebesar Rp 200 triliun dan penerimaan pajak sebesar Rp 400 triliun. Tentukanlah :
(a) Pendapatan nasional keseimbangan
(b) Konsumsi keseimbangan
(c) Tabungan keseimbangan

Penyelesaian
$I = 400$, $G = 800$, $R = 200$ dan $T = 400$

Nyatakan $C = f(Y_d)$ dalam $C = f(Y)$ sebagai berikut:

$$C = 600 + 0,75\ Y_d = 600 + 0,75\ (Y - T + R)$$
$$= 600 + 0,75(Y - 400 + 200) = 600 + 0,75(Y - 200)$$
$$= 600 + 0,75Y - 150$$
$$C = 450 + 0,75Y.$$
$$S = Y - C = Y - (450 + 0,75Y)$$
$$S = -450 + 0,25Y$$

(a) Pendapatan nasional keseimbangan
Per rumus (4.60) pendapatan keseimbangan dapat dihitung sebagai berikut:

$$S + T - R = I + G$$
$$(-450 + 0,25Y) + 400 - 200 = 400 + 800$$
$$0,25Y = 1.450$$
$$Y = 1.450/0,25 = 5.800$$

Jadi, pendapatan nasional keseimbangan adalah Rp 5.800 triliun

(b) Konsumsi keseimbangan

$$C = 450 + 0,75Y \rightarrow C = 450 + 0,75\ (5.800) = 4.800$$

Jadi, konsumsi keseimbangan adalah Rp 4.800 triliun

(c) Tabungan keseimbangan
$$S = Y - C$$
$$= 5.800 - 4.800 = 1.000$$

Jadi, tabungan keseimbangan adalah Rp 1.000 triliun

Soal-soal Latihan

4 - 1 Coba saudara periksa, yang mana diantara persamaan berikut ini merupakan fungsi permintaan, fungsi penawaran mungkin keduanya dan mungkin bukan keduanya. Q = banyaknya barang yang diminta konsumen (Q_d) atau ditawarkan oleh produsen (Q_s). P = harga per unit barang.

(a) $P + 3Q - 14 = 0$
(b) $P – 2Q - 4 = 0$
(c) $5Q + 4P + 20 = 0$
(d) $Q – 3P = 0$
(e) $3Q + 4P - 12 = 0$
(f) $P = 10$
(g) $P + 2Q + 3 = 0$
(h) $Q = 5$

4 - 2 Fungsi permintaan terhadap sejenis barang berbentuk,

$$Q_d = -\tfrac{1}{2}P + 10$$

(a) Berapakah kuantitas barang yang diminta bila harga tiap unit barang tersebut: 2, dan 5?
(b) Berapakah harga tertinggi yang bersedia dibayar untuk barang ini?
(c) Berapakah kuantitas yang diminta, apabila barang tersebut adalah barang bebas?
(d) Tentukanl nilai Q_d dan P yang memenuhi fungsi permintaan.
(e) Buatlah sketsa grafiknya.

4 - 3 Fungsi penawaran suatu komoditi (barang) adalah $Q_s = 2P - 2$
(a) Tentukanlah kuantitas yang ditawarkan bila harga per unit barang tersebut: 4, dan 6.
(b) Berapakah harga terendah barang ini sehingga masih ada produsen yang mau menawarkan barangnya?.
(c) Tentukan batas-batas nilai Q_s dan P yang memenuhi fungsi penawaran.
(d) Buatlah grafiknya.

4 - 4 Berdasarkan hasil penelitian sebuah pasar mengenai permintaan terhadap sejenis komoditas diperoleh data seperti yang tercantum pada tabel di bawah ini :

Harga per unit (P)	Jumlah unit barang yang diminta (Q_d)
5	0
4	2
3	4

Bila garis permintaan komoditas dianggap linear, berdasarkan data dalam tabel.
(a) Tentukanlah fungsi permintaannya.

(b) Berapakah kuantitas barang yang diminta bila harga barang 2 per unit?
(c) Buatlah grafiknya

4 - 5 Berdasarkan hasil penelitian pasar, penawaran sejenis barang pada berbagai tingkat harga seperti tercantum pada tabel berikut :

Harga per unit (P)	Banyak barang yang ditawarkan (Q_s)
7	9
5	3

Bila garis penawaran barang tersebut dianggap linear,
(a) Tentukanlah fungsi penawarannya.
(b) Tentukanlah batas-batas nilai Q_s dan P yang memenuhi fungsi penawarannya.
(c) Bila harga per unit barang 4, berapa unit barang yang akan ditawarkan oleh produsen?
(d) Tentukanlah harga per unit barang sehingga produsen bersedia menawarkan barangnya.
(e) Buatlah sketsa grafiknya.

4 - 6 Biaya tetap untuk memproduksi sejenis barang adalah Rp 3.000,00 Biaya variabel per unit adalah 40% dari harga jual per unitnya. Harga jual per unitnya adalah Rp10,00 , tentukanlah kuantitas pulang pokok. Agar labanya Rp1800,00, berapa unit sebaiknya berproduksi?

4 - 7 Berdasarkan hasil penelitian pasar terhadap permintaan dan penawaran sejenis barang, memberikan data sebagai berikut :

Harga per unit (P)	Kuantitas yang diminta (Q_d)	Kuantitas yang ditawarkan (Q_s)
2	14	1
4	8	5

(a) Tentukanlah fungsi permintaannya.
(b) Tentukanlah fungsi penawarannya.
(c) Tentukanlah kuantitas dan harga keseimbangan pasar.
(d) Buatlah grafiknya dalam satu gambar.

4 - 8 Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah:

$Q_d = -\frac{1}{2}P + 25$ dan $Q_s = 2P - 50$

Apabila pemerintah menarik pajak penjualan sebesar t = 5 per unit,
(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan sesudah pajak.
(b) Tentukanlah persentasi perubahan harga dan perubahan kuantitas keseimbangan, setelah pemerintah menarik pajak.

(c) Tentukanlah total pajak yang diterima oleh pemerintah.
Tentukanlah total pajak yang ditanggung oleh produsen.
Tentukanlah total pajak yang dibebankan kepada konsumen.
(d) Buatlah grafiknya dalam satu gambar.

4 - 9 Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah :
$Q_d = 40 - 2P$ dan $Q_s = 3P - 10$
Bila pemerintah memberikan subsidi sebesar 5 per unit atas barang yang terjual
(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan sebelum dan setelah subsidi.
(b) Tentukanlah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.
Tentukanlah total subsidi yang dinikmati oleh produsen.
Tentukanlah total subsidi yang dinikmati oleh konsumen.
(c) Buatlah grafiknya.

4 - 10 Fungsi permintaan dan fungsi penawaran sejenis barang berbentuk:
$5Q_d + P - 80 = 0$ dan $2Q_s - P + 10 = 0$.

Tentukanlah kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum dan setelah adanya kebijakan dari pemerintah di bawah ini,
(a) Pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar t = 14 per unit. Serta hitunglah total pajak yang diterima pemerintah.
(b) Pemerintah mengenakan pajak prosentase sebesar 15% per unit. Serta hitunglah total pajak yang diterima pemerintah.
(c) Pemerintah memberikan subsidi sebesar 14 per unit. Serta hitunglah besar total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.

4 - 11 Suatu perusahaan menderita rugi sebesar Rp1.000,00, bila menjual barang sebanyak 20 unit. Tetapi bila perusahaan menjual barangnya sebanyak 100 unit, perusahaan akan memproleh laba sebanyak Rp 3000,00. Bila harga jual barang tersebut Rp 150,00 per unit.
Pertanyaan
(a) Tentukanlah fungsi penerimaan total, biaya total dan fungsi biaya variabel.
(b) Tentukanlah kuantitas pulang pokok (impas)
(c) Tentukanlah besar penerimaan total, biaya total, biaya variabel dan biaya tetapnya pada posisi pulang pokok

4 - 12 Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh fungsi C = 10.000 + 50Q. Sementara penerimaan totalnya R = 100Q. Pada produksi berapa unit perusahaan ini berada pada posisi pulang pokok. Apa yang terjadi (untung/rugi) bila perusahaan tersebut berproduksi sebanyak: (a) 250 unit, dan (b) 150 unit. Berapa besar biaya tetapnya?

4 - 13 Biaya tetap untuk memproduksi sejumlah barang adalah Rp 3.000,00. Sementara biaya variabelnya diperkirakan 60% dari penerimaan

totalnya. Bila barang tersebut dijual dengan harga Rp 10,00 per unit. Tentukanlah :
(a) Biaya total bila berproduksi (dan terjual) sebanyak 2.000 unit
(b) Tentukanlah kuantitas impas.
(c) Agar diperoleh laba sebesar Rp 1000,00, berapa unit sebaiknya berproduksi?

4-14 *Autonomous Consumtion* suatu negara diketahui sebesar 200, sedangkan MPC-nya = 0,4.
Tentukanlah :
(a) Fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya
(b) Besar konsumsi bila pendapatan nasional negara tersebut 10.000.
(c) Besar tabungan bila pendapatan nasional negara tersebut 10.000

4 - 15 Permintaan dan penawaran dua jenis barang yang memiliki hubungan substitusi ditunjukkan oleh pasangan fungsi berikut ini

Jenis Barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	$Q_{d1} = 100 - 2P_1 + P_2$	$Q_{s1} = P_1 - 10$
Barang kedua	$Q_{d2} = 5 - 3P_2 + 2P_1$	$Q_{s2} = 6P_2 - 5$

(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan pasar, masing-masing untuk barang pertama dan kedua.
(b) Bila pemerintah mengenakan pajak penjualan masing-masing sebesar $\frac{1}{2}$ per unit baik untuk barang pertama, dan barang kedua. Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang setelah pemerintah mengenakan pajak. Hitunglah total pajak yang diterima oleh pemerintah.
(c) Bila pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar $\frac{1}{2}$ per unit untuk barang pertama, dan memberikan subsidi sebesar 1 per unit untuk barang yang kedua.Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang setelah pemerintah mengenakan pajak dan memberikan subsidi. Hitunglah pula penerimaan/pengeluaran bersih pemerintah.

4 - 16 Dalam periode waktu tertentu**,** fungsi permintaan dan penawaran pupuk urea di suatu daerah dicerminkan oleh persamaan berikut:

$Q_d + 12P - 12 = 0$ dan $Q_s - 3P + 3 = 0$

Q = kuantitas pupuk (satuan dalam kg), P = harga per kg pupuk (satuan dalam ribu rupiah). Pemerintah memberikan subsidi sebesar Rp 1.000,00 per kg pupuk yang terjual.
Pertanyaan
(a) Tentukanlah kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum dan sesudah adanya subsidi.
(b) Tentukanlah total subsidi yang dinikmati oleh konsumen.

(c) Tentukanlah total subsidi yang dinikmati oleh produsen.
(d) Tentukanlah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.

4 - 17 Sebuah perusahaan menjual barangnya dengan harga Rp1.500,00 per unit. Biaya bahan-bahan Rp 400,00 per unit. Biaya tenaga kerja Rp 550,00 per unit. Biaya pengepakan Rp 150,00 per unit. Biaya tetapnya Rp 2000,00

Tentukanlah:
(a) Fungsi total revenu R = f(Q)
(b) Fungsi total biaya variabel VC = f(Q)
(c) Fungsi biaya total C = f(Q)
(d) Fungsi laba/profit π = f(Q)
(e) Kuantitas yang dijual agar diperoleh laba sebesar Rp 6.000,00
(f) Kuantitas impas (pulang pokok)

4 - 18 Permintaan dan penawaran dua jenis barang interdependen (saling tergantung) ditunjukkan oleh pasangan fungsi berikut ini

Jenis Barang	**Permintaan**	**Penawaran**
Barang Pertama	$Q_{d1} = -2P_1 + P_2 + 10$	$Q_{s1} = 2P_1 - 3$
Barang kedua	$Q_{d2} = -2P_2 + 2P_1 + 5$	$Q_{s2} = 3P_2 - 2$

(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan pasar, masing-masing untuk barang pertama dan kedua.
(b) Bila pemerintah mengenakan pajak penjualan hanya pada barang pertama sebesar 5 per unit.Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang setelah pemerintah mengenakan pajak. Hitunglah total pajak yang diterima oleh pemerintah.
(c) Bila pemerintah memberikan subsidi sebesar 2 per unit hanya kepada barang yang kedua saja.Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang setelah adanya subsidi. Hitunglah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.

4 - 19 Permintaan dan penawaran dua jenis barang interdependen (saling tergantung) ditunjukkan oleh pasangan fungsi berikut ini

Jenis Barang	Permintaan	Penawaran
Barang Pertama	$Q_{d1} = -2P_1 + P_2 + 10$	$Q_{s1} = 2P_1 - 3$
Barang kedua	$Q_{d2} = -2P_2 + 2P_1 + 5$	$Q_{s2} = 3P_2 - 2$

(a) Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan pasar untuk masing-masing barang.

(b) Bila pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar t = 2 per unit hanya terhadap barang pertama, tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan pasar yang baru, untuk kedua jenis barang. Tentukanlah total pajak yang diterima pemerintah.
(c) Bila pemerintah memberikan subsidi sebesar 3 per unit hanya kepada barang yang kedua saja.Tentukanlah harga dan kuantitas keseimbangan untuk masing-masing barang setelah adanya subsidi. Hitunglah total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah.
(d) Bila pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar t = 2 per unit terhadap barang pertama dan memberikan subsidi sebesar 3 per unit kepada barang yang kedua. Tentukanlah total pajak yang diterima pemerintah, total subsidi yang dikeluarkan oleh pemerintah, dan penerimaan bersih/pengeluaran bersih pemerintah.

4 - 20 Untuk perekonomian suatu negara secara keseluruhan, konsumsi merupakan fungsi linear terhadap pendapatan nasionalnya sebagai berikut: Pada tiap tingkat pendapatan berapapun, konsumsi sama dengan 4 miliar ditambah 80% dari pendapatan nasionalnya

Tentukanlah :
(a) Fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya
(b) Nilai konsumsi dan tabungan agregat apabila pendapatannya sebesar 60 miliar

4 - 21 Konsumsi masyarakat sebuah negara (dua sektor) ditunjukkan oleh fungsi,

$$C = 60 + 0{,}4Y$$

Pertanyaan
(a) Carilah fungsi tabungannya.
(b) Bila investasi yang terjadi 300, tentukanlah pendapatan nasional keseimbangannya.
(c) Berapa konsumsi masyarakat negara tersebut bila pendapatan nasionalnya 400.
(d) Berapa tabungan masyarakat negara tersebut bila pendapatan nasionalnya 400
(e) Buatlah sketsa grafik fungsi konsumsi dan tabungan dalam satu gambar.

4 - 22 Fungsi konsumsi nasional dari suatu negara $C = 400 + 0{,}8Y_d$. Pemerintah hanya memberikan pembayaran alihan sebesar 100, tanpa pernah memungut pajak dari warga masyarakatnya. Bila pendapatan nasional negara tersebut adalah 1000.

Tentukanlah:
(a) Konsumsi dan tabungan masyarakat negara tersebut.
(b) Pendapatan disposibel masyarakat negara tersebut.

4 - 23 Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara (perekonomian tiga sektor) adalah

$$C = 60 + 0{,}6Y_d$$

Pemerintah menerima pajak sebesar 40 dari masyarakat, tapi juga memberikan pembayaran alihan sebesar 30 kepada warga masyarakatnya. Sementara pengeluaran pemerintah 100, dan investasi yang terealisasi sebesar 50. Tentukanlah pendapatan nasional keseimbangannya.

4- 24 Perekonomian suatu negara merupakan perekonomian tiga sektor. Konsumsi masyarakatnya mengikuti fungsi : $C = 400 + 0{,}8Y_d$. Investasi yang terealisasi mencapai Rp 250 triliun, pengeluaran pemerintah sebesar Rp 700 triliun, pembayaran alihan kepada masyarakat sebesar Rp 100 triliun dan penerimaan pajak sebesar Rp 300 triliun.

Tentukanlah :

(a) Pendapatan nasional keseimbangan
(b) Konsumsi keseimbangan
(c) Tabungan keseimbangan

Bab 9 APLIKASI TURUNAN FUNGSI DALAM EKONOMI DAN BISNIS

9.1 Pengantar

Dalam bab ini akan dibahas mengenai aplikasi (penerapan) turunan suatu fungsi dengan satu variabel bebas dalam ekonomi dan bisnis yaitu terbatas pada elastisitas, fungsi marginal antara lain penerimaan marginal, biaya marginal, konsumsi dan tabungan marginal; juga dibahas masalah optimisasi yaitu memaksimumkan laba, penerimaan atau penjualan, dan meminimumkan biaya-biaya (biaya total dan biaya rata-rata).

Tujuan bab ini. Setelah mempelajari bab ini peserta didik (mahasiswa) diharapkan mampu menerapkan turunan atau hitung diferensial dalam ekonomi.

9.2 Elastisitas

Elastisitas y terhadap x dari fungsi y = f(x) adalah perbandingan antara perubahan relatif dalam variabel terikat y terhadap perubahan relatif dalam variabel bebas x. Yang dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\text{Elastisitas y terhadap x} = \frac{\text{Perubahan relatif dalam variabel terikat (y)}}{\text{Perubahan relatif dalam variabel bebas (x)}}$$

$$E_{yx} = \qquad = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} \qquad (9.1)$$

E_{yx} = Elastisitas y terhadap x.

Δy = Perubahan variabel terikat (y).

$\frac{\Delta y}{y}$ = Perubahan relatif dalam variabel terikat (y).

Δx = Perubahan variabel bebas (x).

$\frac{\Delta x}{x}$ = Perubahan relatif dalam variabel bebas (x).

9.2.1 Elastisitas Busur dan Elastisitas Titik

Ada dua cara pengukuran elastisitas suatu fungsi, yaitu elastisitas busur (*arc elasticity*) dan elastisitas titik (*point elasticity*). Elastisitas busur mengukur elastisitas suatu fungsi di antara dua titik sepanjang suatu busur. Sementara elastisitas titik mengukur elastisitas suatu fungsi pada satu titik tertentu.

Elastisitas dapat digunakan untuk mengukur ketanggapan permintaan atau penawaran suatu barang terhadap perubahan harganya atau pendapatan konsumen.

Sesuai dengan definisi, maka elastisitas busur dan elastisitas titik dapat dinyatakan sebagai berikut :

■ Elastisitas Busur

Elastisitas y terhadap x di antara dua buah titik sepanjang busur dari fungsi y = f(x), dapat dinyatakan oleh :

$$E = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} \qquad (9.2)$$

■ Elastisitas Titik

Dengan mengambil harga limit untuk $\Delta x \to 0$ dari persamaan (9.2), didapat elastisitas titik dari y = f(x), pada titik (x,y) sebagai berikut :

$$E = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} \qquad (9.3)$$

E = Koefisien elastisitas (dibaca : elastisitas saja).

9.2.2 Sifat Keelastisan Suatu Fungsi

Untuk mengetahui sifat keelastisan (ketanggapan) suatu fungsi dapat dilihat dari harga mutlak koefisien elastisitasnya | E |, sebagai berikut :

(1) Bila | E | = 1, maka fungsi tersebut elastis satuan

(2) Bila | E | > 1, maka fungsi tersebut elastis

(3) Bila | E | < 1, maka fungsi tersebut tidak elastis
(4) Bila | E | = 0, maka fungsi tersebut tidak elastis sempurna
(5) Bila | E | = ∞, maka fungsi tersebut elastis sempurna

9.2.3 Interpretasi Terhadap Koefisien Elastisitas

Tanda positif atau negatif dari nilai koefisien elastisitas (E), bukanlah menyatakan tanda aljabar, melainkan menyatakan arah hubungan antara variabel bebas x dengan variabel terikat y. Nilai E yang positip menunjukkan bahwa hubungan antara variabel bebas x dengan variabel terikat y adalah searah. Sedangkan nilai E yang negatif (E dengan tanda negatif) menunjukkan bahwa hubungan antara variabel bebas x dengan variabel terikat y berlawanan arah (berbanding terbalik). Interpretasi terhadap nilai elastisitas suatu fungsi y = f(x) adalah sebagai berikut :

(1) E = k (positif k), memiliki arti bahwa bila variabel bebas x **naik** 1%, maka variabel terikat y **naik** sebesar k%; atau bila variabel bebas x **turun** 1 %, maka variabel terikat y **turun** sebesar k%.

(2) E = - k (negatif k), memiliki arti bahwa bila variabel bebas x **naik** 1%, maka variabel terikat y **turun** sebesar k%; atau bila variabel bebas x **turun** 1%, maka variabel terikat y **naik** sebesar k%.

9.3 Elastisitas Permintaan dan Penawaran

9.3.1 Elastisitas Permintaan

Elastisitas permintaan (terhadap harga) dari suatu barang adalah perbandingan antara perubahan relatif kuantitas barang yang diminta oleh pembeli (konsumen) terhadap perubahan relatif harga barang tersebut.

Elastisitas busur dan elastisitas titik dari fungsi permintaan Q_d = f(P), dapat dinyatakan sebagai berikut :

■ **Elastisitas (Busur) Permintaan**

$$\eta_d = \qquad (9.4)$$

■ **Elastisitas (Titik) permintaan**

$$\eta_d = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP} \qquad (9.5)$$

η_d = elastisitas permintaan, P = harga per unit barang, Q_d = kuantitas barang yang diminta.

9.3.2 Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (terhadap harga) dari suatu barang adalah perbandingan antara perubahan relatif kuantitas barang yang ditawarkan penjual (produsen) terhadap perubahan relatif harga barang yang tersebut.

Elastisitas busur dan elastisitas titik dari fungsi penawaran $Q_s = f(P)$, dapat dinyatakan sebagai berikut:

■ **Elastisitas (Busur) Penawaran**

$$\eta_s = \frac{\Delta Q_s / Q_s}{\Delta P / P} = \frac{P}{Q_s} \cdot \frac{\Delta Q_s}{\Delta P} \qquad (9.6)$$

■ **Elastisitas (Titik) Penawaran**

$$\eta_s = \qquad (9.7)$$

η_s = elastisitas penawaran, P = harga per unit barang, Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan.

Contoh 9 - 1

Fungsi permintaan terhadap sejenis barang adalah $Q_d = 49 - P^2$

Pertanyaan

(a) Hitunglah elastisitas permintaan barang tersebut pada tingkat harga 3 per unit dan tentukanlah pula sifat keelastisitasanya pada kondisi itu

(b) Berikanlah makna dari nilai elastisitas pada butir (a).

(c) Bila harga turun 2%, tentukanlah elastisitas busurnya.

Penyelesaian

(a) Elastisitas (titik) permintaan pada tingkat harga 3 per unit

$$Q_d = 49 - P^2 \rightarrow \frac{dQ_d}{dP} = -2P$$

P = 3, maka $Q_d = 49 – 9 = 40$

Maka elastisitas permintaan pada titik (3, 40) adalah

$$\eta_d = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP} = \frac{3}{40}.(-2p)$$

$$= \frac{-6P}{40} = \frac{-6(3)}{40} = -0{,}45$$

Jadi, elastisitas permintaan terhadap barang tersebut pada tingkat harga 3 per unit = - 0,45. Oleh karena $|\eta_d| = 0,45 < 1$, maka sifat permintaan atas barang tersebut adalah tidak elastis (*inelastis*).

(b) η_d = - 0,45, memiliki makna (arti) bahwa bila harga per unit barang tersebut naik 1%, maka kuantitas barang diminta oleh pembeli turun 0,45%. Sebaliknya bila harga per unit barang tersebut turun 1%, maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli naik 0,45%. Dengan kata lain, bila harga per unit barang tersebut naik 100%, maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli turun 45%, sebaliknya bila harga per unit barang tersebut turun 100%, maka kuantitas barang yang diminta naik 45%.

(c) Elastisitas (busur) permintaan

Perubahan harga , $\Delta P = 2\% \,.\, (P) = 2\% \,.(3) = 0,06$

Harga yang baru , $P_1 = P - \Delta P$

$= 3 - 0,06 = 2,94$

Permintaan baru, $Q_{d1} = 49 - P_1^2$

$= 49 - (2,94)^2 = 40,35$

Perubahan permintaan, $\Delta Q_d = Q_{d1} - Q_d$

$= 40,35 – 40 = 0,35$

Perubahan permintaan relatif, $\frac{\otimes Q_d}{Q_d} = \frac{0,35}{40}$

Jadi, elastisitas (busur) permintaannya

$$\eta_d = \frac{\otimes Q}{Q} / \frac{\otimes P}{P} = \frac{0,35}{40} / (-2\%) = -0,44$$

Catatan : Nilai $\Delta p/p$ diberi tanda minus karena perubahan menurun dan sekaligus menunjukkan slope kurva permintaan yang negatif

Contoh 9 - 2

Berdasarkan hasil penelitian pasar penawaran terhadap sejenis barang ditunjukkan oleh keadaan sebagai berikut. Bila harga per unit barang tersebut 9, maka kuantitas barang yang ditawarkan sebanyak 2 unit. Bila harga per unit barang tersebut naik menjadi 15, maka kuantitas barang yang ditawarkan 14 unit.

Tentukanlah

(a) Elastisitias busurnya.

(b) Fungsi penawarannya.

(c) Elastisitas penawarannya pada tingkat harga 10 per unit, dan berikan interpretasi.

(d) Tentukan sifat keelastisan dari penawaran barang tersebut.

Penyelesaian

Harga per unit (P)	Kuantitas yang ditawarkan (Q_s)
9	2
15	14

(a) **Elastisitas (busur) penawaran**

Perubahan harga, $\Delta P = 15 - 9 = 6$

Perubahan relatif dalam harga, $\dfrac{\Delta P}{P} = \dfrac{6}{9}$

Perubahan kuantitas, $\Delta Q_s = 14 - 2 = 12$

Perubahan relatif dalam kuantitas, $\dfrac{\Delta Qs}{Qs} = \dfrac{12}{2} = 6$

Maka, elastisitas (busur) penawarannya

$$\eta_s = \frac{\otimes Q_s}{Q_s} / \frac{\otimes P}{P} = 6 / \frac{6}{9}$$

$$= 9$$

(b) **Fungsi penawarannya**

Dari dua buah titik yang diketahui yaitu titik (P_1, Q_{s1}) = (9, 2) dan (P_2, Q_{s2}) = (15,14), per rumus 3.6 persamaan fungsi penawarannya dapat dicari sebagai berikut:

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Qs - Qs_1}{Qs_2 - Q_1}$$

$$\frac{P - 9}{15 - 9} = \frac{Qs - 2}{14 - 2}$$

$$\frac{P - 9}{6} = \frac{Qs - 2}{12}$$

$2(P – 9) = Q_s – 2$ (kedua ruas dikalikan 12)

$2P – 18 = Q_s - 2$

$Q_s = 2P – 16$.

Jadi, fungsi penawarannya adalah $Q_s = 2P – 16$.

(c) Elastisitas (titik) penawaran pada tingkat harga 10 per unit.

P = 10, maka Q_s = ...?

$Q_s = 2P – 16$.

$Q_s = 2(10) – 16$

$= 20 – 16 = 4$.

Bila P = 10, maka $Q_s = 4 \rightarrow (10,4)$

$Q_s = 2P - 16 \rightarrow \dfrac{dQ_s}{dP} = 2$

Maka, elastisitas penawarannya pada titik (10, 4) adalah

$$\eta_s = \frac{P}{Q_s} \cdot \frac{dQ_s}{dP}$$

$$= \frac{10}{4}(2) = 5$$

$\eta_s = 5$, memiliki arti bahwa, bila harga per unit barang tersebut naik 1%, maka kuantitas barang yang ditawarkan akan naik 5%. Atau sebaliknya bila harga per unit barang tersebut turun 1% maka kuantitas barang yang ditawarkan oleh produsen/penjual turun 5%.

(d) Oleh karena $|\eta_s| = |5| > 1$, maka sifat penawaran barang tersebut adalah elastis.

Contoh 9 - 3

Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang berbentuk,

$$Q_d = \sqrt{16 - P} \quad \text{dan} \quad Q_s = P - 4$$

Tentukanlah elastisitas permintaan dan elastisitas penawarannya pada titik keseimbangan pasar.

Penyelesaian

$Q_d = \sqrt{16 - P} = (16 - P)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad Q_s = P - 4$

$\dfrac{dQ_d}{dP} = \dfrac{1}{-2\sqrt{16 - P}}$ $\qquad \dfrac{dQ_s}{dP} = 1$

Syarat keseimbangan pasar

$Q_d = Q_s$

$\sqrt{16 - P} = P - 4$

$16 - P = (P - 4)^2$

$16 - P = P^2 - 8P + 16$

$0 = P^2 - 7P$

$P(P - 7) = 0$

$P = 0$ (tidak memenuhi kedua fungsi)

$(P - 7) = 0$

$P = P_E = 7$ (memenuhi kedua fungsi)

Bila $P_E = 7$ dimasukkan ke dalam persamaan Q_d atau Q_s akan didapat Q_E.

$P_E = 7 \rightarrow \quad Q_s = P - 4$

$Q_E = 7 - 4 = 3$

Titik keseimbangan pasar adalah E (7, 3)

Elastisitas (titik) permintaan

$$\eta_d = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP}$$

$$= \frac{P}{Q_d} \cdot \left(\frac{1}{-2\sqrt{16-p}}\right) = \frac{7}{3}\left(\frac{1}{-2\sqrt{16-7}}\right)$$

$$= \frac{7}{3}\left(\frac{1}{-2(3)}\right) = -0{,}38$$

Elastisitas(titik) penawaran

$$\eta_s = \frac{P}{Q_s} \cdot \frac{dQ_s}{dP}$$

$$\eta_s = \frac{7}{3}.(1) = 2{,}33$$

Contoh 9 – 4

Fungsi permintaan terhadap sejenis barang ditunjukkan oleh,

$$Q_d = -0{,}2P + 40$$

Pada tingkat harga 50 per unit.

(a) Hitunglah elastisitas permintaannya.
(b) Tentukanlah sifat keelastisan permintaannya.
(c) Berikan makna nilai elastisitasnya.

Penyelesaian

(a) Elastisitas permintaan barang pada P = 50.

$$Q_d = -0{,}2P + 40$$

Untuk P = 50, Q_d = . . . ?

$$Q_d = -0{,}2P + 40$$
$$= -0{,}2(50) + 40 = 30$$

Diperoleh (P, Q_d) = (50, 30).

$$Q_d = -0{,}2P + 40 \rightarrow \frac{dQ_d}{dP} = -0{,}2$$

Selanjutnya, elastisitas permintaan barang tersebut pada titik (50, 30) adalah,

$$\eta_d = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP}$$

$$\eta_d = \frac{50}{30}.(-0{,}2) = -0{,}33$$

(b) Oleh karena harga mutlak $\eta_d = |-0{,}33| = 0{,}33 < 1$, maka sifat permintaan barang tersebut tidak elastis (*inelastis*)

(c) Nilai η_d= - 0,33, memiliki arti bahwa bila harga per unit barang naik 100% maka kuantitas barang yang diminta oleh pembeli turun 33%.

9.4 Fungsi Marginal

Dalam Bab 4 dan 6 telah dibahas mengenai fungsi penerimaan total atau fungsi hasil penjualan total, penerimaan rata-rata, fungsi biaya total dan biaya rata-rata. Pada bagian ini akan dibahas mengenai fungsi margina yaitu turunan pertama dari suatu fungsi, antara lain : fungsi penerimaan marginal, biaya marginal, konsumsi marginal, tabungan marginal dan fungsi pembentukan modal/aliran investasi bersih. Selain itu, akan dibahas kembali mengenai masalah optimisasi yaitu penerimaan yang maksimum, laba yang maksimum, dan biaya yang minimum dengan pendekatan turunan.

■ Penerimaan Marginal (MR)

Penerimaan Marginal atau hasil penjualan marginal atau marginal revenu adalah tambahan penerimaan akibat tambahan satu unit barang yang dijual. Fungsi penerimaan marginal merupakan turunan (pertama) dari fungsi penerimaan total. Bila fungsi penerimaan totalnya dinyatakan sebagai R = f(Q), maka fungsi penerimaan marginalnya adalah,

$$MR = R' = \frac{d(R)}{dQ} \qquad (9.8)$$

■ Biaya Marginal (MC)

Biaya marginal atau *marginal cost* adalah tambahan biaya akibat tambahan satu unit produksi. Fungsi biaya marginal merupakan turunan (pertama) dari fungsi biaya total. Bila fungsi biaya totalnya dinyatakan sebagai C = f(Q), maka fungsi biaya marginalnya adalah,

$$MC = C' = \frac{d(C)}{dQ} \qquad (9.9)$$

■ Konsumsi Marginal (MPC)

Konsumsi marginal atau hasrat konsumsi marginal adalah perubahan konsumsi akibat adanya perubahan satu unit pendapatan. Fungsi konsumsi marginal merupakan turunan (pertama) dari fungsi konsumsinya. Bila fungsi konsumsi dinyatakan sebagai C = f(Y), Y = pendapatan, maka fungsi konsumsi marginalnya adalah

$$MPC = C' = \frac{d(C)}{dY} \qquad (9.10)$$

■ Tabungan Marginal (MPS)

Tabungan Marginal atau hasrat tabungan marginal adalah perubahan tabungan akibat perubahan satu unit pendapatan. Fungsi tabungan marginal merupakan turunan (pertama) dari fungsi tabungan. Bila fungsi tabungan dinyatakan sebagai, S = f(Y), Y = pendapatan dan S = tabungan, maka fungsi tabungan marginalnya adalah

$$MPS = S' = \frac{d(S)}{dY} \qquad (9.11)$$

■ Laju Pembentukan Modal

Bila pembentukan modal dipandang kontinu sepanjang waktu, maka persediaan modal (stok kapital) dapat dinyatakan sebagai fungsi dari waktu yaitu: $K_t = f(t)$. Turunan pertama dari fungsi persediaan modal ini disebut laju pembentukan modal (*rate of capital formation*). Laju pembentukan modal pada waktu t sama dengan laju aliran investasi bersih (*rate of net invesment flow*) pada waktu t, yang dinyatakan dengan $I_t = f(t)$. Jadi, fungsi laju pembentukan modal/ aliran investasi bersih dapat dinyatakan sebagai :

$$I_t = K'_t = \frac{d(K_t)}{dt} \qquad (9.12)$$

K_t = modal pada tahun yang ke – t.
I_t = investasi pada tahun yang ke – t.

Selanjutnya untuk mengingat kembali fungsi penerimaan, fungsi biaya, fungsi konsumsi, fungsi tabungan beserta fungsi-fungsi marginal dan fungsi rata-ratanya dapat diikthisarkan sebagai berikut :

Penerimaan	Biaya
Fungsi penerimaan total $R = f(Q)$	Fungsi biaya total $C = f(Q)$
Fungsi penerimaan marginal $MR = \frac{d(R)}{dQ}$	Fungsi biaya marginal $MC = \frac{d(C)}{dQ}$
Fungsi penerimaan rata-rata $AR = R = \frac{R}{Q}$	Fungsi biaya rata-rata $AC = C = \frac{C}{Q}$

Konsumsi	Tabungan
Fungsi konsumsi $C = f(Y)$	Fungsi tabungan $S = f(Y)$
Fungsi konsumsi marginal $MPC = \frac{d(C)}{dY}$	Fungsi tabungan marginal $MPS = \frac{d(S)}{dY}$
Fungsi konsumsi rata-rata $APC = C = \frac{C}{Y}$	Fungsi tabungan rata-rata $APS = S = \frac{S}{Y}$

$$Y = C + S$$
$$MPS + MPC = 1$$

Contoh 9 - 5

Fungsi total penerimaan sebuah perusahaan perdagangan dinyatakan oleh

$R = f(Q) = -5Q^2 + 30Q$

R = total penjualan dan Q = kuantitas barang

Tentukanlah

(a) Fungsi penerimaan marginalnya.
(b) Fungsi penerimaan rata-ratanya.
(c) Besarnya penerimaan marginal, penerimaan rata-rata dan penerimaan total, bila barang yang terjual 3 unit.
(d) Buatlah sketsa grafiknya dalam satu gambar.

Penyelesaian

(a) Fungsi penerimaan marginalnya

$R = -5Q^2 + 30Q$

$$MR = R' = \frac{d(R)}{dQ} = -10Q + 30$$

(c) Fungsi penerimaan rata-ratanya

$$AR = \frac{R}{Q} = \frac{-5Q^2 + 30Q}{Q}$$

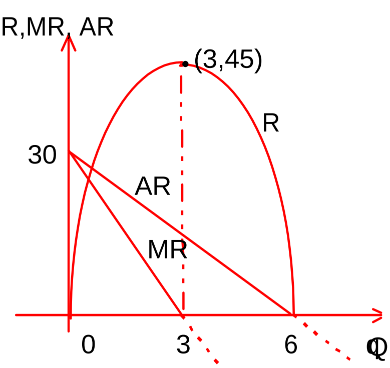
$$= -5Q + 30$$

(d) Penerimaan marginal, bila Q = 3 $\rightarrow$ $MR = -10Q + 30 = -10(3) + 30 = 0$

Penerimaan rata-rata, bila Q = 3 $\rightarrow$ $AR = -5Q + 30 = -5(3) + 30 = 15$

Penerimaan total, bila Q = 3 $\rightarrow$ $R = -5Q^2 + 30Q = -5(3)^2 + 30(3) = 45$

(e) Sketsa Grafiknya



Gambar 9.1

Contoh 9 - 6
Fungsi biaya total sebuah perusahaan manufaktur ditunjukkan oleh

$C = f(Q) = 2{,}5Q^2 – 20Q + 100$

C = biaya total dan Q = kuantitas barang yang diproduksi

Tentukanlah
(a) Fungsi biaya marginalnya
(b) Fungsi biaya rata-ratanya
(c) Bila perusahaan berproduksi sebanyak 6 unit, tentukanlah biaya marginal, biaya rata-rata, dan biaya totalnya.

Penyelesaian
(a) Fungsi biaya marginalnya

$C = f(Q) = 2{,}5Q^2 – 20Q + 100$, maka

$$MC = f'(Q) = \frac{d(C)}{dQ} = 5Q - 20$$

(b) Fungsi biaya rata-rata

$$AC = f(Q) = \frac{C}{Q} = \frac{2{,}5Q^2 - 20Q + 100}{Q} = 2{,}5Q - 20 + \frac{100}{Q}$$

(c) Biaya marginal, bila Q = 6 $\rightarrow$ MC $= 5(6) - 20 = 10$
Biaya rata- rata, bila Q = 6 $\rightarrow$ AC $= 2{,}5(6) - 20 + = 11{,}66$
Biaya total, bila Q = 6 $\rightarrow$ C $= 2{,}5(6)^2 - 20(6) + 100 = 70$

Contoh 9 - 7
Bila fungsi konsumsi suatu masyarakat, $C = f(Y) = 50 + 0{,}8Y + 0{,}2\sqrt{Y}$.
C = konsumsi dan Y = pendapatan.

Tentukanlah:
(a) Fungsi hasrat konsumsi marginal (MPC)-nya
(b) Fungsi hasrat konsumsi rata-ratanya (APC)
(c) Besar hasrat konsumsi marginal dan konsumsi rata-rata bila pendapatannya 100.

Penyelesaian
$C = 50 + 0{,}8Y + 0{,}2\sqrt{Y} \rightarrow C = 50 + 0{,}8Y + 0{,}2\,Y^{1/2}$

(a) Fungsi hasrat konsumsi marginalnya

$$MPC = \frac{d(C)}{dY} = 0{,}8 + 0{,}1\,Y^{-1/2} = 0{,}8 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}}$$

(b) Fungsi hasrat konsumsi rata-ratanya

$$APC = \frac{C}{Y}$$

$$= \frac{50 + 0{,}8Y + 0{,}2Y^{1/2}}{Y}$$

$$= \frac{50}{Y} + 0{,}8 + \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$$

(c) Hasrat konsumsi marginalnya, bila Y = 100

$$MPC = 0{,}8 + \frac{0{,}1}{\sqrt{Y}} = 0{,}8 + \frac{0{,}1}{\sqrt{100}}$$

$$= 0{,}8 + 0{,}01 = 0{,}81$$

Hasrat konsumsi rata-ratanya, bila Y = 100

$$APC = \frac{50}{Y} + 0{,}8 + \frac{0{,}2}{\sqrt{Y}}$$

$$= \frac{50}{100} + 0{,}8 + \frac{0{,}2}{\sqrt{100}}$$

$$= 1{,}32$$

Contoh 9 - 8
Bila fungsi tabungan suatu masyarakat, S = f(Y) = - 5 + 0,8 lnY .
S = tabungan dan Y = pendapatan.

Tentukanlah:
(a) Fungsi hasrat tabungan marginal (MPS).
(b) Besarnya hasrat tabungan marginal bila pendapatanya 10.

Penyelesaian
S = - 5 + 0,8 lnY

(a) Fungsi hasrat tabungan marginal

$$MPS = \frac{d(S)}{dY} = \frac{0{,}8}{Y}$$

(b) Hasrat tabungan marginal, bila Y = 10

$$MPS = \frac{0{,}8}{Y}$$

$$= \frac{0{,}8}{10} = 0{,}08$$

Contoh 9 - 9
Stok Kapital (K) pada suatu daerah pada tahun ke t ditunjukkan oleh fungsi

$$K = f(t) = 30\, t^{\frac{5}{3}} + 120t$$

Tentukanlah
(a) Fungsi aliran investasi bersih pada tahun ke t.
(b) Berapa besar (aliran) investasi bersih pada awal tahun (t = 0)?

Penyelesaian

$$K = 30\, t^{\frac{5}{3}} + 120t$$

(a) Fungsi aliran investasi bersih

$$I = \frac{dK}{dt} = 50\, t^{\frac{2}{3}} + 120$$

(b) Besar (aliran) investasi bersih pada tahun awal (t = 0)

$$I = 50\,(0)^{\frac{2}{3}} + 120 = 120$$

9.5 Masalah Optimisasi

Dalam Bab 6 telah dipelajari penerapan optimisasi, khusus untuk fungsi kuadrat tegak melalui informasi titik puncak kurva/fungsi yaitu titik P(x = - b/2a, y = - D/4a). Pada subbab ini, akan dipelajari kembali penerapan optimisasi suatu fungsi melalui informasi turunannya, baik untuk fungsi kuadrat, fungsi eksponen dan logaritma maupun untuk fungsi kubik.

■ **Penerimaan Total yang Maksimum**

Bila fungsi penerimaan total dinyatakan sebagai R = f(Q), maka penerimaan total akan maksimum bila dipenuhi syarat :

(1) $R' = \quad = 0$ (syarat yang diperlukan)

(2) $R'' = \quad < 0$ (syarat yang mencukupi) (9.13)

■ **Penerimaan Total Maksimum dari Pajak**

Bila fungsi penerimaan total dari pajak dinyatakan sebagai T = f(Q), maka penerimaan total dari pajak yang diterima oleh pemerintah T, akan maksimum bila dipenuhi syarat :

(1) T' = = 0 (syarat yang diperlukan)

(2) T" = < 0 (syarat yang mencukupi) (9.14)

■ Laba/profit yang Maksimum

Besarnya laba dirumuskan, π = R - C (lihat kembali Bab 4). Bila fungsi laba dinyatakan sebagai π = f(Q), maka laba akan mencapai maksimum bila dipenuhi syarat :

(1) ' = = 0 (syarat yang diperlukan)

(2) " = < 0 (syarat yang mencukupi) (9.15)

■ Biaya Total yang Minimum

Bila fungsi biaya total dinyatakan sebagai C = f(Q), maka biaya total akan mencapai minimum, bila dipenuhi syarat :

(1) C' = = 0 (syarat yang diperlukan)

(2) $C'' = \dfrac{d^2(C)}{dQ^2} > 0$ (syarat yang mencukupi) (9.16)

■ Biaya Rata-rata yang Minimum

Bila fungsi biaya rata - rata dinyatakan sebagai AC = f(Q), maka biaya rata-rata akan mencapai minimum, bila dipenuhi syarat :

(1) AC ' = = 0 (syarat yang diperlukan)

(2) AC " = > 0 (syarat yang mencukupi) (9.17)

9.6 Penerimaan Total, Penerimaan Marginal dan Elastisitas Permintaan

Bila fungsi permintaan sejenis barang Q_d = (P), dinyatakan dalam P = $f(Q_d)$, maka:

Penerimaan Total, $R = QP = Q.f(Q_d)$

Penerimaan Rata- rata , $AR = \frac{R}{Q_d} = \frac{PQ_d}{Q_d} = P$

Penerimaan Marginal, $MR = R' = \frac{d(R)}{dQ}$

Hubungan antara MR, AR, dan η_d dinyatakan oleh persamaan berikut:

$$MR = AR\left(1 + \frac{1}{\eta_d}\right) \qquad (9.18)$$

Agar dapat lebih memahami penerapan optimisasi (maksimisasi dan minimisasi) suatu fungsi dalam ekonomi, simaklah beberapa contoh berikut.

Contoh 9 - 10

Seorang produsen memiliki fungsi permintaan atas barangnnya berbentuk: Q_d = 5 - 0,25P. Sementara biaya rata-rata untuk memproduksi tiap unit barangnya adalah $\bar{C}$ = 3. Tentukanlah laba maksimum yang diperolehnya.

Penyelesaian

$Q_d = 5 - 0{,}25P$

$Q_d = 5 - \frac{1}{4}P \rightarrow \quad P = 20 - 4Q$ (transposisi rumus)

Fungsi penerimaan total, $R = P.Q$
$= (20 - 4Q)Q$
$= 20Q - 4Q^2$

Fungsi biaya total, $C = Q.\bar{C}$
$= Q.3 = 3Q$

Fungsi Laba/propit, $\pi = R - C$
$= (20Q - 4Q^2) - 3Q$
$= 17Q - 4Q^2$

Laba tersebut akan maksimum bila dipenuhi dua syarat:

(1) Syarat yang diperlukan

$\pi' = 0$

$\pi' = 17 - 8Q$

$0 = 17 - 8Q$

$8Q = 17$
$Q = 2{,}125$

(2) Syarat yang mencukupi

$\pi'' < 0$

$\pi'' = \dfrac{d(\pi')}{dQ} = -8 < 0 \rightarrow$ maksimum pada Q = 2,125

Besarnya laba maksimum.
Substitusikan Q = 2,125 ke fungsi laba diperoleh laba maksimum sebagai berikut:

$\pi = 17Q - 4Q^2$

$\pi_{(maks)} = 17(2{,}125) - 4(2{,}125)^2 = 18{,}063$

Jadi, laba maksimum yang diperolehnya adalah 18,063

Contoh 9 – 11
Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan jasa penyewaan mobil mewah dinyatakan oleh fungsi $C = f(Q) = 4Q^2 - 120Q + 3.600$
C = biaya total dan Q = kuantitas mobil

(a) Tentukanlah biaya rata-rata minimumnya.
(b) Tentukanlah biaya marginal pada saat biaya rata-ratanya minimum.

Penyelesaian

(a) Biaya rata-rata minimum
Fungsi biaya rata-rata, $AC = \dfrac{C}{Q} = \dfrac{4Q^2 - 120Q + 3600}{Q}$

$= 4Q - 120 + \dfrac{3600}{Q} = 4Q - 120 + 3600Q^{-1}$

AC akan minimum bila dipenuhi dua syarat.

(1) Syarat yang diperlukan

$AC' = 0$

$AC' = 4 - 3600Q^{-2}$

$4 - 3.600Q^{-2} = 0$

$4 - \dfrac{3600}{Q^2} = 0$

$\dfrac{3600}{Q^2} = 4$

$Q^2 = 900$

$Q = \pm 30$

Q = 30 (bermakna)

Q = - 30 (tidak bermakna)

(2) Syarat yang mencukupi

$AC'' > 0$

$AC'' = 3600\,Q^{-3} = \dfrac{3600}{Q^3} = \dfrac{3600}{(30)^3} > 0$ (minimum pada Q = 30)

Besarnya biaya rata-rata minimum.
Substitusikan Q = 30 ke dalam fungsi AC, diperoleh besarnya biaya rata-rata minimumnya.

$$AC = 4Q - 120 + \frac{3600}{Q}$$

$$AC_{(min)} = 4(30) - 120 + \frac{3600}{30} \quad \text{(substitusikan Q = 30)}$$

$$= 120$$

(b) Biaya marginal pada Q = 30

$$MC = \frac{d(C)}{dQ} = 8Q - 120$$

$$= 8(30) - 120$$

$$= 120$$

Contoh 9 – 12
Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang adalah

$Q_d = -0{,}5P + 2$ dan $Q_s = P - 2$

Tentukanlah penerimaan maksimum dari pajak yang diterima oleh pemerintah, bila pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang yang dijual, dan hitunglah besarnya t.

Penyelesaian
$Q_d = -0{,}5P + 2 \rightarrow P = -2Q + 4$ (Transposisi rumus)
$Q_s = P - 2$

Sebelum Pajak	Setelah pajak
$Q_d = -0{,}5P + 2$	$Q_{dt} = Q_d = -0{,}5P + 2 \leftrightarrow P = -2Q + 4$
$Q_s = P - 2$	$Q_{st} = (P - t) - 2$

Kesetimbangan setelah pajak, bila $Q_{dt} = Q_{st}$

$$Q_{dt} = Q_{st}$$

$$-0{,}5P + 2 = (P - t) - 2$$

$$-0{,}5P + 2 = P - t - 2$$

$$t = 1{,}5P - 4 \qquad (1)$$

Subsitusikan transposisi rumus ke (1) di dapat fungsi t = f(Q) berikut.

$$t = 1{,}5(-2Q + 4) - 4$$

$$= -3Q + 6 - 4$$

$$= -3Q + 2 \qquad (2)$$

Pajak total yang diterima oleh Pemerintah (T),

$$T = t.Q$$
$$= (-3Q + 2)(Q)$$
$$T = f(Q) = -3Q^2 + 2Q \qquad (3)$$

Pajak total akan mencapai maksimum bila dipenuhi dua syarat :

(1) Syarat yang diperlukan

$T' = 0$

$T' = -6Q + 2$ $\qquad 6Q = 2$

$-6Q + 2 = 0$ $\qquad Q = \frac{1}{3}$

(2) Syarat yang mencukupi

$T'' < 0$

$T'' = -6 < 0$ (Pajak maksimum pada $Q = \frac{1}{3}$)

Penerimaan pajak yang maksimum.
Substitusikan $Q = \frac{1}{3}$ ke (3), diperoleh penerimaan pajak yang maksimum sebagi berkut:

$$T = -3Q^2 + 2Q$$

$$T_{(maks)} = -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Besarnya pajak per unit.

Substitusikan $Q = \frac{1}{3}$ ke dalam persamaan (2), diperoleh nilai t.

$$t = -3Q + 2$$
$$= -3\ \frac{1}{3}) + 2 = 1$$

Jadi, penerimaan maksimum dari pajak yang diterima oleh pemerinah sebesar $\frac{1}{3}$. Besarnya pajak per unit yang tersebut (t) adalah 1.

Contoh 9 - 13
Dalam periode tertentu, total penjualan sebuah perusahaan manufaktur yang memproduksi pupuk ditunjukkan oleh $R = f(Q) = -2Q^3 + 12Q^2 + 72Q$
R = total penjualan (dalam miliar rupiah), Q = kuantitas pupuk (dalam ton). Agar total penjualannya maksimum (anggaplah semua produknya terjual), berapa ton seharusnya perusahaan tersebut berproduksi? Berapa nilai total penjualan maksimumnya?

Penyelesaian
$R = -2Q^3 + 12Q^2 + 72Q$

Total penjualan tersebut akan maksimum bila dipenuhi dua syarat:

(1) Syarat yang diperlukan

$R' = 0$

$R' = -6Q^2 + 24Q + 72$

$0 = -6Q^2 + 24Q + 72$
$0 = Q^2 - 4Q - 12$ (Kedua ruas dibagi minus 6)
$0 = (Q - 6)(Q + 2)$
$(Q - 6) = 0 \rightarrow Q_1 = 6$ (bermakna secara ekonomis)
$(Q + 2) = 0 \rightarrow Q_2 = -2$ (tidak bermakna secara ekonomis)

(2) Syarat yang mencukupi
$R'' < 0$
$R'' = -12Q + 24$
Pada $Q = 6 \rightarrow R'' = -12(6) + 24$
$= -48 < 0$ (total penjualan maksimum pada Q = 6)
Dengan mensubstitusikan Q = 6 ke dalam fungsi asal, diperoleh total penjualan yang maksimum sebagai berikut:

$$R = -2Q^3 + 12Q^2 + 72Q$$
$$R_{(maks)} = -2(6)^3 + 12(6)^2 + 72(6)$$
$$= -432 + 432 + 432 = 432$$

Jadi, agar diperoleh total penjualan yang maksimum, sebaiknya perusahaan berproduksi sebanyak 6 ton. Total penjualan maksimum yang diperoleh sebesar 432 miliar rupiah.

Contoh 9 - 14
Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan yang memproduksi minyak pelumas dicerminkan oleh: $C = 4Q^3 + 24Q^2 - 252Q + 500$
C = biaya total (dalam miliar rupiah), Q = kuantitas produk (dalam ribu galon). Berapa galon sebaiknya perusahaan berproduksi agar biaya total nya minimum? Berapa nilai biaya total minimumnya?

Penyelesaian
$C = 4Q^3 + 24Q^2 - 252Q + 500$

Biaya total tersebut akan mencapai minimum bila dipenuhi dua syarat:
(1) Syarat yang diperlukan
$C' = 0$
$C' = 12Q^2 + 48Q - 252$
$0 = 12Q^2 + 48Q - 252$
$0 = Q^2 + 4Q - 21$
$0 = (Q + 7)(Q - 3)$
$(Q + 7) = 0 \rightarrow Q_1 = -7$ (tidak bermakna secara ekonomis)
$(Q - 3) = 0 \rightarrow Q_2 = 3$ (bermakna secara ekonomis)

(2) Syarat yang mencukupi
$C'' = > 0$
$C'' = 24Q + 48$
Pada $Q = 3 \rightarrow C'' = 24(3) + 48 = 72 + 48$
$= 120 > 0$ (biaya total minimum pada Q = 3)

Dengan memasukkan Q = 3 ke dalam fungsi asal akan diperoleh total biaya minimumnya.

$$C = 4Q^3 + 24Q^2 - 252Q + 500$$
$$C_{(Min)} = 4(3)^3 + 24(3)^2 - 252(3) + 500$$
$$= 108 + 216 - 756 + 500$$
$$= 68$$

Jadi, agar total biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut minimum sebaiknya perusahaan tersebut berproduksi sebanyak 3 ribu galon. Nilai total biaya yang minimum adalah 68 miliar rupiah.

Contoh 9 - 15

Sebuah perusahaan manufaktur yang memproduksi sejenis bubuk kimia, memperkirakan bahwa biaya rata-rata produksi per kg bubuk kimia, tergantung dari kuantitas bubuk yang diproduksi. Fungsi biaya rata-rata per kg produk ini dicerminkan oleh,

$$\bar{C} = 0{,}02Q^2 - 100 \ln(Q) + 600$$

$\bar{C}$ = biaya rata-rata per kg (dalam juta rupiah) dan Q = kuantitas barang (dalam kg).Tunjukkanlah tingkat produksi yang meminimum biaya rata-rata per kg tersebut. Berapa nilai biaya rata-rata minimumnya?

Penyelesaian

$\bar{C} = 0{,}02Q^2 - 100 \ln Q + 600$

Biaya rata-rata per kg bubuk akan mencapai minimum bila dipenuhi dua syarat :

(1) Syarat yang diperlukan

$$\frac{d(\bar{C})}{dQ} = 0$$

$$\frac{d(\bar{C})}{dQ} = 0{,}04Q - 100.\frac{1}{Q}$$

$$0 = 0{,}04Q - \frac{100}{Q} \rightarrow \frac{100}{Q} = 0{,}04Q$$

$$10000 = 4Q^2$$

$$2500 = Q^2$$

$$Q = \sqrt{2500} = \pm 50$$

Q = - 50 (tak bermakna secara ekonomis)

Q = 50 (bermakna secara ekonomis)

(2) Syarat yang mencukupi

$$\left(\frac{d^2(\bar{C})}{dQ^2}\right) > 0$$

$$\frac{d^2(\bar{C})}{dQ^2} = 0{,}04 + 100Q^{-2} = 0{,}04 + \frac{100}{Q^2}$$

$$\frac{d^2(\overline{C})}{dQ^2} = 0,04 + \frac{100}{(50)^2} \quad \text{(pada Q = 50)}$$

$$= 0,04 + 0,04$$

$$= 0,08 > 0 \text{ (biaya rata-rata minimum pada Q = 50)}$$

Biaya rata-rata per kg yang minimum.
Substitusikan Q = 50 ke dalam fungsi asal akan diperoleh biaya rata-rata minimum per kg-nya, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \overline{C} &= 0,02Q^2 - 100 \ln Q + 600 \\ \overline{C}_{(min)} &= 0,02\,(50)^2 - 100\,(\ln 50) + 600 \\ &= 50 - 100\,(3,912) + 600 \\ &= 50 - 391,2 + 600 \\ &= 259,2 \end{aligned}$$

Jadi, tingkat produksi yang meminimumkan biaya rata- rata per kg adalah 50 kg. Nilai minimum biaya rata-rata per kgnya adalah 259,2 juta rupiah

Contoh 9 - 16
Profit tahunan sebuah perusahaan jasa keuangan di sebuah provinsi ditaksir dipengaruhi oleh banyaknya tenaga pemasaran yang dikaryakan. Fungsi profitnya adalah

$$\pi = (20Q)\, e^{-0,002Q}$$

π = profit (dalam juta rupiah) dan Q = kuantitas tenaga kerja pemasaran. Berapa orang tenaga pemasaran yang harus dikaryakan agar profitnya maksimum. Berapa nilai profit maksimumnya?

Penyelesaian
$\pi = (20Q)\, e^{-0,002Q}$

Profit tersebut akan mencapai maksimum bila dipenuhi dua syarat:
(1) Syarat yang diperlukan

$$\pi' = \frac{d\pi}{dQ} = 0$$

$$\pi' = 20.\,e^{-0,002Q} + \left\{e^{-0,002Q}{}_{(-0,002)}\right\}(20Q)$$

$$= \frac{20}{e^{0,002Q}} - \frac{0,002(20Q)}{e^{0,002Q}} = \frac{20}{e^{0,002Q}} - \frac{0,04Q}{e^{0,002Q}}$$

$$0 = \frac{20}{e^{0,002Q}} - \frac{0,04Q}{e^{0,002Q}}$$

$$20 = 0,04Q \rightarrow Q = 500$$

(2) Syarat yang mencukupi

$\pi'' > 0$

$$\pi'' = \left\{20(0{,}002)e^{-0{,}002Q}\right\} - \left\{0{,}04e^{-0{,}002Q} - 0{,}002e^{-0{,}002Q}(0{,}04Q)\right\}$$

$$= \frac{-0{,}04}{e^{0{,}002Q}} - \left\{\frac{0{,}04}{e^{0{,}002Q}} - \frac{0{,}00008Q}{e^{0{,}0002Q}}\right\} = \frac{-0{,}08}{e^{0{,}002Q}} + \frac{0{,}00008Q}{e^{0{,}002Q}}$$

$$= \frac{-0{,}08}{e^{0{,}002\,(500)}} + \frac{0{,}00008\,(500)}{e^{0{,}002\,(500)}} \quad \text{(pada Q = 500)}$$

$$= \frac{-0{,}08}{e^2} + \frac{0{,}04}{e^2} = \frac{-0{,}04}{e^2}$$

$$= \frac{-0{,}04}{(2{,}718)^2} = \frac{-0{,}04}{7{,}38752}$$

$= -0{,}0054 < 0$ (Profit maksimum pada Q = 500)

Profit yang maksimum.

Substitusikan Q = 500 ke dalam fungsi profit, $\pi = f(Q)$ akan diperoleh profit yang maksimum sebagai berikut:

$$\pi = f(Q) = 20(Q)\, e^{-0.002Q} = \frac{20Q}{e^{0{,}002Q}}$$

$$\pi_{(\text{maks})} = \frac{20(500)}{e^{0{,}002(500)}}$$

$$= \frac{10.000}{e^2} = \frac{10.000}{(2{,}718)^2} = 4.188{,}4817$$

Jadi,

(a) Tenaga pemasaran yang dikaryakan agar profitnya maksimum sebanyak 500 orang

(b) Profit yang diperoleh sebesar 4.188,4817 juta rupiah = 4,188481 miliar rupiah.

9.7 Keuntungan Monopoli

Monopoli termasuk salah satu bentuk persaingan pasar yang tidak sempurna. Pada pasar monopoli, ada seorang penjual (produsen) yang dapat menguasai pasar terhadap sejenis barang (jasa) tertentu, sehingga si monopoli dapat mengendalikan harga barang (jasa) yang dijualnya dengan cara mengatur kuantitas barang yang ditawarkan.

Jika kuantitas barang/jasa yang ditawarkan dikurangi maka harga barang akan naik, sebaliknya jika kuantitas barang yang ditawarkan ditambah maka harga barang tersebut akan turun. Dengan jalan mengatur kuantitas barang yang beredar di pasar si monopoli akan mudah menentukan tingkat produksi agar mendapatkan laba yang maksimum.

■ Keuntungan Maksimum pada Monopoli

Biaya Total (C)

Bila biaya rata-rata untuk memproduksi per unit barang sebesar $\overline{C}$ dan kuantitas barang yang diproduksi sebanyak Q, maka besarnya biaya total:

$$C = Q\,\overline{C}$$

■ Penerimaan Total (R)

Bila harga per unit barang yang dijual sebesar P dan kuantitas barang dijual sebanyak Q, maka besarnya penerimaan totalnya:

$$R = PQ$$

■ Keuntungan/profit (π)

Besarnya keuntungan yang diperoleh si monopoli adalah :

$$\pi = R - C$$

Keuntungan/profit tersebut akan maksimum, bila dipenuhi:

(1) Syarat yang diperlukan

$\pi' = 0 \rightarrow R' - C' = 0$

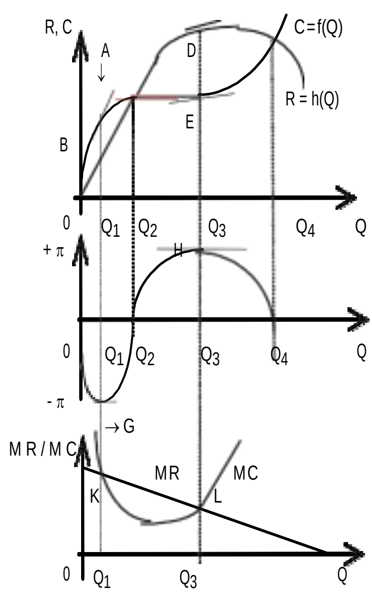
$R' = C'$

$$\boxed{MR = MC} \qquad (9.19)$$

(2) Syarat yang mencukupi

$\pi'' < 0 \rightarrow R'' < C''$

Bila grafik R, C, MR dan MC dan π terhadap Q dibuat dalam satu gambar, gambar grafiknya seperti Gambar 9.2 :



Gambar 9.2

Keterangan Gambar 9.1

Pada tingkat produksi sebesar Q_1 dan Q_3 gradien kurva C dan kurva R sama besar (MC = MR). Pada tingkat produksi Q_1, jarak terlebar antara kurva R dan kurva C mencerminkan selisih negatif terbesar (= kerugian maksimum), yang juga tercermin oleh kurva π yang mencapai minimum di titik G, sedangkan pada tingkat produksi Q_3, jarak terlebar antara kurva C dan kurva R mencerminkan selisih positif terbesar (keuntungan maksimum), yang juga dicerminkan oleh kurva π yang mencapai maksimum di titik H.

Kalau diperhatikan kurva MR dan MC, maka kedua kurva tersebut berpotongan pada tingkat produksi Q_1 (titik potong K) dan pada tingkat produksi Q_3 (dengan titik potong L), oleh karena pada tingkat Q_1 dan Q_3 besar MR = MC.

■ Pengaruh Pajak dalam Monopoli

Jika terhadap barang yang dihasilkan/dijual oleh pemegang monopoli dikenakan pajak penjualan sebesar t per unit, maka pajak ini akan menaikkan biaya per unit produk ($\overline{C}$) sebesar t, dan biaya total (C) akan naik sebesar tQ, sebagai berikut:

Biaya per unit produk setelah pajak: $\overline{C_t} = \overline{C} + t$

Biaya total setelah pajak sebesat t per unit : $C_t = C + tQ = Q.\ \overline{C_t}$

Besarnya laba yang diperoleh,

$$\begin{aligned}\pi &= R - C_t\\ &= R - (C + tQ)\\ &= R - C - tQ\end{aligned}$$

Laba tersebut akan maksimum, bila dipenuhi dua syarat :

(1) Syarat yang diperlukan

$\pi' = 0 \rightarrow R' = C_t'$

(2) Syarat yang mencukupi

$\pi'' < 0 \rightarrow R'' < C_t''$

$\overline{C}$ = biaya rata-rata per unit produk sebelum pajak.
$\overline{C_t}$ = biaya rata-rata per unit produk setelah adanya pajak.
C = biaya total sebelum pajak.
C_t = biaya total setelah adanya pajak.

Contoh 9 - 17

Seorang monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q_d = -0{,}2P + 8{,}2$ dan biaya rata-rata per unit produknya $\overline{C} = Q + 5$.

P = harga per unit produk dan Q = kuantitas produk. Agar si monopolis mendapat laba yang maksimum,

(a) Berapa unit produk seharusnya diproduksi dan berapa harga per unit produk yang harus ditetapkan?

(b) Berapa laba maksimum yang diperolehnya?

Penyelesaian

(a) $Q_d = -0{,}2P + 8{,}2$

$0{,}2\,P = -Q_d + 8{,}2$

$P = -5Q + 41$ (kedua ruas dibagi 0,2, transposisi rumus)

Transposisi rumus diperlukan untuk mendapatkan fungsi R dalam Q, yaitu R = f(Q).

$R = P.Q$
$= (-5Q + 41)Q$
$= -5Q^2 + 41Q$

$\bar{C} = Q + 5$
$C = \bar{C}.Q$
$= (Q + 5)Q = Q^2 + 5Q$

$MR = R' = -10Q + 41$
$R'' = -10$

$MC = C' = 2Q + 5$
$C'' = 2$

Fungsi keuntungan, $\pi = f(Q)$

$\pi = R - C$
$= (41Q - 5Q^2) - (Q^2 + 5Q)$
$\pi = 36Q - 6Q^2$ (fungsi laba)

Laba akan maksimum bila dipenuhi dua syarat :

(1) $MR = MC \rightarrow 41 - 10Q = 2Q + 5 \rightarrow Q = 3$

(2) $R'' < C'' \rightarrow R'' = -10 < C'' = 2$ (Laba maksimum pada Q = 3)

Harga per unit barang adalah,

$P = -5Q + 41$
$= -5(3) + 41 = 26$

Jadi, agar labanya maksimum, maka kuantitas produk yang diproduksi 3 unit, dan harga per unit barang yang ditetapkan 26.

(b) **Laba maksimumnya**

Substitusikan Q = 3 ke dalam fungsi laba, maka diperoleh laba yang maksimum sebagai berikut:

$\pi = 36Q - 6Q^2$
$\pi_{(ma\,k\,)} = 36(3) - 6(3)^2$
$= 108 - 54$
$= 54$

Jadi, laba maksimumnya sebesar 54

Contoh 9 - 18

Pada pasar yang bercorak monopoli diketahui fungsi permintaan terhadap sejenis barang $Q_d = -0{,}5P + 5$ dan biaya rata-rata per unit $\bar{C} = 2{,}5$. Jika terhadap barang yang dihasilkan (terjual) dikenakan pajak 0,5 per unit. Tentukanlah kuantitas barang yang harus diproduksi dan tingkat harga per--unit barangnya agar mendapat keuntungan yang maksimum. Tentukanlah pula keuntungan maksimumnya.

Penyelesaian

$Q_d = -0{,}5P + 5 \Leftrightarrow P = 10 - 2Q$
(Transposisi rumus)

$R = P.Q$
$= (10 - 2Q)Q$
$= 10Q - 2Q^2$

$MR = R' = 10 - 4Q$
$R'' = -4$

$\overline{C} = 2{,}5$

$\overline{C}_t = \overline{C} + t$
$= 2{,}5 + 0{,}5 = 3$

$C_t = Q\,\overline{C}_t = Q.3 = 3Q$
$C_t' = 3$
$C_t'' = 0$

Fungsi keuntungan, $\pi = f(Q)$

$$\begin{aligned}\pi &= R - C_t\\ &= (10Q - 2Q^2) - (3Q)\\ &= 7Q - 2Q^2\end{aligned}$$

Keuntungannya akan maksimum bila dipenuhi dua syarat :
(1) $R' = C_t' \rightarrow 10 - 4Q = 3 \rightarrow Q = 1{,}75$
(2) $R'' < C_t'' \rightarrow R'' = -4 < C_t'' = 0$ (keuntungan maksimum pada Q = 1,75)

Harga per unit barang,

$$\begin{aligned}P &= 10 - 2Q\\ &= 10 - 2(1{,}75) = 10 - 3{,}5 = 6{,}5\end{aligned}$$

Keuntungan maksimum.
Dengan memasukkan Q = 1,75 ke dalam fungsi keuntungan akan diperoleh keuntungan maksimum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\pi &= 7Q - 2Q^2\\ \pi_{(maks)} &= 7(1{,}75) - 2\,(1{,}75)^2\\ &= 12{,}25 - 6{,}125\\ &= 6{,}125\end{aligned}$$

Jadi, agar keuntungannya maksimum maka :
(1) Kuantitas barang yang diproduksi sebanyak 1,75 unit
(2) Harga per unit barang sebesar 6,5
(3) Laba maksimumnya adalah 6,125

Contoh 9 – 19

Fungsi permintaan sejenis barang seorang monopolis, $Q_d = -0{,}5P + 5$ dan biaya rata-rata per unit , AC = $\overline{C}$ = 1. Apabila pemerintah mengenakan pajak penjualan sebesar t per unit terhadap barang yang terjual.

Hitunglah
(a) Keuntungan maksimum yang diperoleh si monopolis.
(b) Besarnya pajak total maksimum yang diperoleh pemerintah dan t.

Penyelesaian

$Q_d = -0{,}5P + 5 \Leftrightarrow P = 10 - 2Q$ (Transposisi rumus)

$\overline{C} = 1$

$R = P.Q$
$= (10 - 2Q)Q$
$= 10Q - 2Q^2$

$\overline{C}_t = 1 + t$

$C_t = Q.\overline{C}_t$
$= Q(1 + t) = Q + tQ$

$MR = R' = 10 - 4Q$
$R'' = -4$

$C'_t = 1 + t$
$C_t'' = 0$

Fungsi keuntungan, $\pi = f(Q)$

$$\pi = R - C_t$$
$$= (10Q - 2Q^2) - (Q + tQ)$$
$$= 9Q - 2Q^2 - tQ$$

$$\pi = -2Q^2 + (9 - t)Q \qquad \text{(fungsi keuntungan)}$$

Keuntungan tersebut akan maksimum bila dipenuhi dua syarat :

(1) $R' = C_t' \rightarrow 10 - 4q = 1 + t \rightarrow Q = \dfrac{9-t}{4}$

(2) $R'' < C_t'' \rightarrow R'' = -4 < C_t'' = 0$ (keuntungan maksimum pada $Q = \dfrac{9-t}{4}$)

Keuntungan maksimum

Dengan memasukkan $Q = \dfrac{9-t}{4}$ ke dalam fungsi keuntungan, diperoleh fungsi keuntungan maksimum dalam bentuk t yaitu $\pi = f(t)$, sebagai berikut:

$$\pi = -2Q^2 + (9 - t)Q$$

$$\pi_{(\,maks\,)} = -2\left(\frac{9-t}{4}\right)^2 + (9-t)\left(\frac{9-t}{4}\right)$$
$$= -\frac{(9-t)^2}{8} + \frac{(9-t)^2}{4} = -\frac{(9-t)^2}{8} + 2\frac{(9-t)^2}{8}$$
$$= \frac{(9-t)^2}{8}$$

Penerimaan pajak total,

$$T = t.Q$$
$$= t\,\frac{(9-t)}{4} = \frac{9t - t^2}{4} = \frac{9}{4}t - \frac{1}{4}t^2 \qquad \text{(Fungsi pajak)}$$

Penerimaan pajak total tersebut akan maksimum bila dipenuhi syarat:

(1) $T' = \dfrac{dT}{dt} = 0 \quad \rightarrow \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{2}t = 0 \rightarrow t = \dfrac{9}{2}$

(2) $T'' = \dfrac{d^2T}{dt^2} < 0 \rightarrow T'' = -\dfrac{1}{2} < 0$ (Pajak maksimum pada $t = \dfrac{9}{2}$)

Pajak total maksimum

Substitusikan $t = \frac{9}{2}$ ke dalam fungsi pajak total, untuk memperoleh pajak total yang maksimum.

$$T = \frac{9}{4}t - \frac{1}{4}t^2$$

$$T_{(maks)} = \frac{9}{4}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{16} = \frac{162 - 81}{16}$$

$$= \frac{81}{16}$$

Keuntungan maksimumnya.

Dengan memasukkan $t = \frac{9}{2}$ ke dalam fungsi keuntungan maksimum, maka akan diperoleh keuntungan maksimumnya.

$$\pi_{(maks)} = \frac{(9 - t)^2}{8}$$

$$= \frac{\left(9 - \frac{9}{2}\right)^2}{8} = \frac{\left(\frac{18 - 9}{2}\right)^2}{8}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^2}{8} = \frac{81}{32}$$

Pajak per unit (t),

$$t = \frac{9}{2}$$

Jadi,

(a) Keuntungan maksimum yang diperoleh si monopolis sebesar $\frac{81}{32}$
(b) Pajak per unit yang dipungut oleh pemerintah sebesar $\frac{9}{2}$
Pajak total maksimum yang diperoleh pemerintah sebesar $\frac{81}{16}$

9.8 Model-model Persediaan

Pengendalian persediaan dalam suatu perusahaan sangat penting, oleh karena persediaan yang terlalu banyak mengakibatkan biaya penyimpanan meningkat, dan sebaliknya persediaan yang terlalu sedikit dapat mengakibatkan kekurangan persediaan barang untuk diproduksi atau dijual. Pengendalian persediaan mencoba menyeimbangkan antara pemesanan besar yang ekonomis atau menjalankan produksi besar dengan biaya pemeliharaan persediaan. Tujuan dari model persediaan adalah meminimalkan total biaya persediaan. Biaya-biaya dalam model persediaan ini terdiri dari tiga type :

1 Biaya pemesanan atau mulai menjalankan produksi (*set up cost*)
Biaya pemerosesan dan pemesanan, biaya telpon, biaya pengepakan, biaya ekspedisi termasuk kelompok biaya ini.
2 Biaya pemeliharaan persediaan, termasuk biaya modal (bunga), penyusutan, biaya penyimpanan (*carrying cost*).
3 Biaya yang berlaku sesaat, termasuk kerugian/kehilangan *goodwill* (*shortage cost*).

Pada bagian ini akan dipelajari dua model persediaan, yaitu: (1) model persediaan yang mengasumsikan bahwa barang-barang masuk sebagai persediaan tidak kontinu, dan (2) model persediaan yang mengasumsikan bahwa barang-barang masuk sebagai persediaan secara kontinu selama periode pemesanan atau produksi. Kedua model tersebut juga mengasumsikan bahwa variabel permintaan, harga per unit produk, *set up cost ,carrying cost* per unit adalah konstan. Di samping itu, semua permintaan untuk produk dipenuhi (tidak terjadi kekurangan barang). Dua model yang dibahas berikut ini, tanpa memperhitungkan *shortage cost* nya. Dengan demikian total biaya persediaan **tiap periode** dapat dinyatakan sebagai berikut:

Total biaya persediaan = total biaya pemesanan + total biaya penyimpanan

■ **Model Pertama.** Kedatangan barang persediaan tidak kontinu.
Untuk model ini total biaya persediaan tiap periode dirumuskan sebagai:

$$C = \qquad (9.20)$$

D = permintaan tiap periode, c_1 = *set up cost*, c_2 = *carrying cost* per unit barang, Q = kuantitas barang yang ditempatkan dalam persediaan pada suatu saat, Q/2 = persediaan rata-rata dan D/Q = banyaknya kumpulan barang tiap periode.

Biaya persediaan tersebut akan minimum bila dipenuhi dua syarat yaitu :

(1) $\dfrac{dC}{dQ} = 0$

$$\frac{dC}{dQ} = \frac{c_2}{2} - \frac{c_1 D}{Q^2} \rightarrow 0 = \frac{c_2}{2} - \frac{c_1 D}{Q^2}$$

$$Q = \sqrt{} \qquad (9.21)$$

(2) $\dfrac{d^2C}{dQ^2} > 0$ (untuk Q > 0)

Jadi, total biaya persediaan tersebut akan minimum, bila banyaknya barang yang ditempatkan dalam persediaan $Q = \sqrt{(2c_1D) / c_2}$, dalam D/Q kali setiap periode. Selanjutnya dengan memasukkan nilai $Q = \sqrt{(2c_1D) / c_2}$ ke dalam fungsi total biaya persediaan, didapatlah nilai total biaya persediaan yang minimum.

■ **Model Kedua.** Kedatangan barang persediaan sinambung/kontinu.
Bila kedatangan barang persediaan sinambung, maka total biaya persediaanya, dirumuskan sebagai berikut:

$$C= \quad (1 - \quad) + \qquad (9.22)$$

D = permintaan tiap periode, c_1 = *set up cost*, c_2 = *carrying cost* per unit barang, Q = kuantitas barang yang ditempatkan dalam pertambahan persediaan, k = tingkat kedatangan barang (kuantitas barang tiap periode).

Total biaya persediaan tersebut akan minimum bila dipenuhi dua syarat, yaitu : (1) $\frac{dC}{dQ} = 0$ dan (2) $\frac{d^2C}{dQ^2} > 0$. Dengan menyelesaikan persamaan (1) akan diperoleh :

$$Q = \sqrt{\quad} \qquad (9.23)$$

untuk Q > 0, syarat (2) akan terpenuhi. Jadi, total biaya persediaan tersebut minimum bila banyaknya barang yang ditempatkan dalam pertambahan persediaan adalah $Q = \sqrt{(2c_1D) / c_2[1 - (D / k)]}$, dalam D/Q kali setiap periode.

Contoh 9 - 20

Untuk memproduksi sejenis barang, sebuah perusahaan membutuhkan bahan baku sebanyak 5000 unit setiap semester. Biaya untuk menyimpan satu unit per bulan sebesar 1,5. Biaya pemesanan sebesar 1.Tentukanlah kuantitas pesanan yang meminimalkan total biaya persediaan dan besarnya total biaya persediaan yang minimum tersebut.

(a) Bila perusahaan membeli bahan baku, secara periodik dengan jumlah yang besar.
(b) Bila perusahaan membeli bahan baku, secara periodik dari supllier yang mengirimkan secara terus menerus 1500 unit setiap bulan.

Penyelesaian

(a) Kasus kedatangan barang persediaan tidak sinambung

$D = 5000$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1{,}5 \times 6 = 9$

$$Q = \sqrt{\frac{2c_1 D}{c_2}} \rightarrow Q = \sqrt{\frac{2(1)(5000)}{9}} = \frac{100}{3}$$

$$C = \frac{c_2 Q}{2} + \frac{c_1 D}{Q}$$

Pada $Q = \frac{100}{3} \rightarrow C = \dfrac{(9)(\frac{100}{3})}{2} + \dfrac{(1)(5000)}{\frac{100}{3}} = 300$

Jadi, kuantitas pesanan agar total biaya persediaan minimum adalah $\frac{100}{3}$ tiap semester. Sedangkan total biaya persediaan yang minimum sebesar 300.

(b) Kasus kedatangan persediaan sinambung

$D = 5000$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1{,}5 \times 6 = 9$, $k = 1500 \times 6 = 9000$

$$Q = \sqrt{(2c_1D) / c_2[1 - (D / k)]} = \sqrt{(2(1)(5000) / 9[1 - (5000 / 9000)]}$$

$$= \sqrt{(10.000) / 9[1 - 5 / 9)]} = \sqrt{(10.000) / 9[4 / 9)]} = \sqrt{(10.000) / 4)} = 25$$

$$C = \frac{1}{2} c_2 Q \left(1 - \frac{D}{k}\right) + \frac{c_1 D}{Q}$$

Pada $Q = 25 \rightarrow C = \frac{1}{2} c_2 Q \left(1 - \frac{D}{k}\right) + \frac{c_1 D}{Q}$

$$C = \frac{1}{2}(9)(25)\left(1 - \frac{5000}{9000}\right) + \frac{(1)(5000)}{25} = 250$$

Jadi, kuantitas pesanan agar total biaya persediaan minimum adalah 25 tiap semester. Sementara total biaya persediaan yang minimum tersebut adalah 250.

Soal-soal Latihan

9 - 1 Dari hasil penelitian pasar terhadap penawaran sejenis barang didapat data sebagai berikut:

Harga per unit (P)	Kuantitas yang ditawarkan (Q_s)
10	5
15	15
20	25

(a) Tentukanlah elastisitas penawaran barang tersebut.
(1) Bila harga per unit naik dari 10 menjadi 15
(2) Bila harga per unit turun dari 20 menjadi 15

(b) Tentukanlah fungsi penawaran yang linear dan tentukanlah elastisitas penawarannya pada titik (50, 85).

9 - 2 Fungsi permintaan sejenis barang $Q_d = -3P^2 + 4P + 10$
P = harga per unit dan Q_d = kuantitas barang yang diminta.
Pertanyaan

(a) Hitunglah elastisitas dan tentukan sifat keelastisan atas permintaan barang tersebut pada tingkat harga 2.

(b) Berikanlah makna terhadap nilai elastisitasnya.

9 - 3 Fungsi permintaan terhadap sejenis barang adalah

$$Q_d = \left(\frac{25 - P}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pada P = 17, Q_d = 2

(a) Jika harga naik 2%, tentukanlah elastisitas busurnya.

(b) Tentukanlah elastisitas permintaan barang tersebut pada tingkat harga P = 17.

(c) Berikan makna terhadap elastisitas pada butir (b).

9 - 4 Fungsi penawaran terhadap sejenis barang mengikuti fungsi

$$Q_s = 5\,e^{P}$$

P = harga per unit barang dan Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan.

(a) Bila harga per unit barang tersebut naik dari 2 menjadi 7, hitunglah elastisitasnya.

(b) Hitunglah elastisitas penawaran barang tersebut pada tingkat harga 3.

(c) Tentukan pula sifat keelastisan atas penawarannya pada butirt (a) dan (b). Berikan interpretasi.

9 - 5 Fungsi permintaan sejenis barang diduga berbentuk fungsi kuadrat. Hasil penelitian pasar menunjukkan hasil sebagai berikut.

Harga per unit (P)	Kuantitas yang diminta (Q_d)
0	25
2	21
3	16

Pertanyaan
(a) Tentukanlah elastisitas permintaan barang tersebut bila harga per unit turun dari 3 menjadi 2.
(b) Tentukanlah fungsi permintaan barangnya
(c) Tentukanlah elastisitas permintaan barang tersebut pada tingkat harga 4 per unit. Berikan interpretasi terhadap nilai elastisitas yang diperoleh.

9 - 6 Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan manufaktur untuk memproduksi sejenis barang dinyatakan oleh fungsi,

$$C = f(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 4Q^2 + 12Q + 5$$

C = biaya total dan Q = kuantitas barang
Pertanyaan:
(a) Berapa unit sebaiknya perusahaan tersebut berproduksi agar biaya totalnya minimum? Berapa biaya total minimumnya?
(b) Berapa biaya marginal dan biaya rata-rata per unitnya pada saat biaya total minimum?

9 - 7 Fungsi permintaan seorang monopolis $Q_d = 50 – 0,05P$ dan biaya rata-rata produksi tiap unitnya adalah AC = Q + 1
Berapa unit sebaiknya berproduksi dan berapa harga tiap unit barang yang dia hasilkan untuk dijual supaya mendapat laba yang maksimum?

9 - 8 Fungsi permintaan dan fungsi biaya total untuk seorang monopolis berturut-turut $Q_d = - 0,25P + 3$ dan $C = Q^2 + 2Q$. Jika kemudian pemerintah mengenakan pajak sebesar t per unit terhadap barang yang dijual
Tentukanlah,
(a) Laba maksimum yang diperoleh si monopolis.
(b) Pajak maksimum yang diterima oleh pemerintah.

9 - 9 Sebuah perusahaan menjual produknya dengan harga 75 per unit. Biaya total yang dikeluarkan untuk memproduksi dan memasarkannya ditunjukkan oleh fungsi :

$$C = f(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 5Q^2 + 120$$

C = biaya total dan Q = kuantitas barang

Tentukanlah,
(a) Laba maksimum yang dapat diperoleh oleh perusahaan.
(b) Hasil penjualan, biaya marginal, kuantitas barang yang terjual ketika labanya maksimum.
(c) Buatlah grafik fungsi labanya dalam Q, $\pi = f(Q)$

9 - 10 Biaya rata-rata yang dikeluarkan oleh seorang produsen monopolis memiliki fungsi AC = 2Q + 3, jika fungsi permintaan barang tersebut adalah $Q_d = -0{,}2P + 3$.
Berapa unit barang harus dijual jika ia menginginkan keuntungan yang maksimum dan berapa besar keuntungan yang maksimum tersebut. Buatlah grafik R, C dan AC dalam satu gambar.

9 - 11 Jika fungsi AR dari seorang monopolis AR = f(Q) = 19 - 0,05Q dan biaya rata-rata AC = f(Q) = 5 + 0,020Q. Si monopolis menghendaki keuntungan yang maksimum, berapa seharusnya ia berproduksi (Q) dan berapa besarnya keuntungan maksimumnya. Buatlah grafik MR, MC, C dan AC dalam satu gambar.

9 - 12 Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang tertentu masing-masing $Q_d = 14 - 2P$ dan $Q_s = 3P - \frac{9}{4}$
Terhadap barang terjual pemerintah memungut pajak sebesar t per unit. Tentukanlah penerimaan yang maksimum dari pajak dan berapa besarnya t?

9 - 13 Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan dinyatakan oleh, $C = h(Q) = 10Q^2 - 60Q + 500$
Pertanyaan :
(a) Berapa unit sebaiknya perusahaan tersebut berproduksi agar biaya totalnya minimum dan berapa besar biaya total minimumnya.
(b) Hitunglah pula biaya tetap dan biaya variabel pada saat biaya totalnya minimumnya, apa maknanya nilai biaya variabel yang negatif?

9 - 14 Fungsi permintaan terhadap suatu barang $Q_d = -0{,}25P + 6$
Tentukanlah :
(a) Fungsi penerimaan totalnya
(b) Fungsi penerimaan marginalnya
(c) Fungsi penerimaan rata-rata
(d) Penerimaan total, penerimaan marginal dan penerimaan rata-rata bila barang yang terjual 2 unit
(e) Penerimaan total maksimumnya.

9 - 15 Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara, C = 10.000 + 0,75Y
(C = konsumsi dan Y = pendapatan)
Tentukanlah :
(a) Fungsi hasrat konsumsi marginal (MPC).

(b) Fungsi hasrat konsumsi rata-rata (APC).
(c) MPC dan APC bila pendapatan masyarakat 100.

9 - 16 Fungsi penerimaan total sebuah perusahaan diperkirakan mengikuti bentuk $R = f(Q) = 72Q – 4Q^2$
(a) Tentukanlah fungsi penerimaan marginalnya
(b) Berapa unit sebaiknya perusahaan berproduksi agar penerimaan totalnya maksimum?
(c) Tentukanlah penerimaan marginal dan penerimaan rata-ratanya bila barang yang terjual sebanyak 5.

9 - 17 Fungsi tabungan masyarakat suatu negara, $S = - 40 + 0{,}8Y$.
S = tabungan dan Y = pendapatan.
Tentukanlah :
(a) Fungsi hasrat tabungan marginal (MPS)
(b) Fungsi hasrat tabungan rata-rata (APS)
(c) Fungsi konsumsi $C = f(Y)$
(d) Fungsi hasrat konsumsi marginal (MPC).

9 - 18 Fungsi biaya rata-rata untuk memproduksi 1 unit sejenis barang ditunjukkan oleh $AC = f(Q) = 5Q + 40 + \frac{120}{Q}$.
Tentukanlah
(a) Fungsi biaya totalnya.
(b) Fungsi biaya marginalnya.
(c) Biaya marginal dan biaya rata-rata bila berproduksi sebanyak 5 unit.
(d) Kuantitas produksi yang meminimumkan biaya totalnya, dan besarnya biaya total minimumnya.

9 - 19 Fungsi konsumsi masyarakat suatu negara, $C = 60 + 0{,}75Yd$. Bila pemerintah menerima pajak sebesar 10 dari masyarakat dan memberikan pembayaran alihan sebesar 4 kepada warga masyarakatnya. Tentukanlah,
(a) Fungsi hasrat konsumsi marginalnya.
(b) Besar konsumsi masyarakat negara tersebut bila pendapatan masyarakat sebesar 400.

9 - 20 Fungsi permintaan suatu barang $Q_d = 12 - P^2$. Jika Q_d kuantitas barang yang diminta dan P = harga tiap unit barang. Tentukanlah kuantitas barang dan harga per unit barang, serta elastisitas permintaannya pada saat total hasil penjualan maksimum.

9 - 21 Sebuah perusahaan yang memproduksi sejenis produk memperkirakan bahwa biaya produksi per unit barang dipengaruhi oleh bayaknya barang yang dihasilkan, dan mengikuti fungsi :

$$\bar{C} = 0{,}002Q^2 - 1000 \ln Q) + 7500$$

$\bar{C}$ = biaya produksi per unit dan Q = kuantitas barang yang diproduksi. Berapa unit sebaiknya perusahaan berproduksi agar biaya produksi per unitnya minimum?

9 - 22 Fungsi permintaan sejenis barang diperkirakan berbentuk hiperbola fermat sebagai berikut:

$$Q_d = \frac{a}{P^m}$$

Q_d = kuantitas barang, a = konstanta dan P = harga per unit barang. Hitunglah elastisitas permintaannya dan berikanlah interpretasi.

9 - 23 Bagian riset pemasaran sebuah perusahaan kosmetika percaya bahwa profit yang diperoleh perusahaannya dalam periode waktu tertentu, merupakan fungsi dari frekuensi tayangan iklan per hari, di layar TV. Fungsi total profitnya dinyatakan oleh fungsi:

$$\pi = f(Q) = (40Q^2)\, e^{-0,5Q}$$

π = profit (dalam juta rupiah), dan Q = frekuensi tayangan iklan per hari di layar TV. Berapa kali dalam sehari sebaiknya iklan tentang produknya di tayangkan di TV agar profitnya maksimum?

9 - 24 Seorang produsen menghadapi fungsi permintaan Q_d= - 0,2P+ 20 dan biaya totalnya: C = 50 + 25Q. Hitunglah tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum, besarnya keuntungan maksimum dan harga jual per unit produknya.

9 - 25 Stok capital (K) pada suatu daerah pada tahun ke t ditunjukkan oleh fungsi : $K_t = 20\, t^{\frac{3}{2}} + 75t$

Tentukanlah

(a) Fungsi aliran investasi bersih pada tahun ke t.

(b) Berapa besar (aliran) investasi bersih pada awal tahun(t = 0)?

9 - 26 Konsumsi masyarakat suatu negara ditunjukkan oleh fungsi
$C = 80 + 0,6y + 0,4\sqrt{Y}$

Tentukanlah :

(a) Fungsi hasrat konsumsi marginalnya

(b) Fungsi konsumsi rata-ratanya.

(c) MPC dan APC bila pendapatan masyarakat 100.

9 - 27 Untuk memproduksi sejenis barang, sebuah perusahaan membutuhkan bahan baku sebanyak 40.000 unit setiap tahun. Biaya untuk menyimpan satu unit per bulan sebesar 1,5. Biaya pemesanan sebesar 2. Tentukanlah kuantitas pesanan yang meminimalkan total biaya persediaan dan besarnya total biaya persediaan yang minimum tersebut.

(a) Bila perusahaan membeli bahan baku, secara periodik dengan jumlah yang besar.

(b) Bila perusahaan membeli bahan baku, secara periodik dari pemasok yang mengirimkan secara terus menerus 4000 unit setiap bulan.

HITUNG INTEGRAL

10.1 Pengantar

Kalkulus (hitung) diferensial dan integral mempunyai hubungan yang erat. Kalkulus diferensial mencari fungsi turunan dari suatu fungsi tertentu. Fungsi tertentu yang dimaksud disebut fungsi asal atau fungsi primitif. Sedangkan kalkulus integral, sebaliknya yaitu mencari kembali fungsi asal dari suatu fungsi turunan. Maka dari itu kalkulus integral disebut juga antiderivatif.

Dalam bab ini akan dibahas dua macam integral yaitu integral tak tentu dan integral tertentu. Integral tertentu dapat juga digunakan untuk menghitung luas daerah yang tidak beraturan.

Tujuan bab ini. Setelah membaca bab ini, peserta didik (mahasiswa) diharapkan dapat lebih memahami hitung integral.

10.2 Integral Tak Tentu

10.2.1 Pengertian Integral Tak Tentu

Dalam Bab 8 telah dibahas pengertian derivatif suatu fungsi. Bila ada suatu fungsi y = f(x), maka derivatifnya adalah :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y'$$

Sekarang persoalannya dibalik, akan dicari suatu fungsi yang derivatifnya telah diketahui. Cara untuk mencari suatu fungsi yang derivatifnya telah diketahui ini, disebut dengan **anti derivatif** atau **integral tak tentu.**

Teorema

Bila f(x) dan g(x) keduanya adalah integral tak tentu dari f '(x) pada interval tertutup [a, b] maka f(x) dan g(x) keduanya suatu fungsi yang hanya berbeda pada harga konstantanya saja dalam interval [a,b].

Sehingga,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \tag{10.1}$$

$\int f'(x)dx$ dibaca " integral dari f'(x) terhadap x. dx menunjukkan bahwa pengintegralan/proses integrasi dilakukan terhadap variabel x. $\int$ = tanda integral diambil dari huruf jerman S, yang mengacu pada penjumlahan, dipakai pertama kali oleh Leibniz. f(x) = fungsi integral atau fungsi primitif atau fungsi asal. f'(x) = *Integrand*/fungsi yang diintegrasikan. C = Konstanta Integrasi.

Untuk lebih jelasnya mengenai pengertian integral tak tentu, perhatikan contoh berikut:

Contoh 10 – 1

Fungsi Asal	Derivatif/turunan
$g(x) = x^2 + 5$	$g'(x) = 2x$
$z(x) = x^2 + 10$	$z'(x) = 2x$
$u(x) = x^2 + 30$	$u'(x) = 2x$
$\vdots$	$\vdots$
$f(x) = x^2 + C$	$f'(x) = 2x$

Dari Contoh 10-1 ternyata bahwa fungsi-fungsi yang hanya berbeda bilangan **tetapnya** (konstantanya) mempunyai derivatif yang sama.

Jadi,

$$x^2 + C = \int 2x\,dx$$

Atau

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

10.2.2 Kaedah Dasar Integrasi

Integral tak tentu dari suatu fungsi, akan lebih mudah didapat melalui aturan-aturan atau kaedah-kaedah integrasi berikut.

■ **Fungsi Aljabar**

(1) Integral dari suatu konstanta (k)

$$\int k\, dx = kx + C \qquad (10.2)$$

Contoh 10 - 2

(a) $\int 5\, dx = 5x + C$

(b) $\int 15\, dx = 15x + C$

(c) $\int dx = \int 1 dx = x + C$

(2) Integral dari suatu fungsi pangkat ($n \neq -1$)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (10.3)$$

Contoh 10 - 3

(a) $\int x^2\, dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C = \frac{1}{3} x^3 + C$

(b) $\int x^5\, dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C = \frac{1}{6} x^6 + C$

(c) $\int x^{-3}\, dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = \frac{1}{-2} x^{-2} + C = \frac{1}{2x^2} + C$

(3) Integral dari suatu fungsi pangkat ($n = -1$)

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \qquad (10.4)$$

(4) Integral dari suatu konstanta kali fungsi pangkat

$$\int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C,\ n \neq -1 \qquad (10.5)$$

Contoh 10 - 4

(a) $\int x^3\, dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

(b) $\int 2x^3\, dx = \frac{2}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{2}{4} x^4 + C = \frac{1}{2} x^4 + C$

(c) $\int 5x^4\, dx = \frac{5}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{5}{5} x^5 + C = x^5 + C$

(d) $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}\, dx = \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C \ \frac{x^{-4}}{-4} + C$

$= \frac{1}{-4x^4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$

(e) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{2x}{3}\sqrt{x} + C$

■ Fungsi Eksponen

(1) Integral Fungsi Eksponen Berbasis e

$$\int e^{kx}\, dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$$
$$k = \text{konstanta} \qquad (10.6)$$

Contoh 10 - 5

(a) $\int e^x\, dx = e^x + C$

(b) $\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} . e^{3x} + C$

(c) $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C$

(d) $\int e^{15x}\, dx = \frac{1}{15} e^{15x} + C$

(2) Integral Fungsi Eksponen Berbasis a (a ≠ e)

$$\int a^{kx}\, dx = \frac{a^{kx}}{k.\ln a} + C$$
$$k = \text{konstanta} \qquad (10.7)$$

Contoh 10 - 6

(a) $\int 5^{2x}\, dx = \frac{1}{2.\ln 5} .5^{2x} + C$

(b) $\int 7^x\, dx = \frac{1}{1.\ln 7} .7^x + C$

(c) $\int 3^{4t}\, dt = \frac{1}{4.\ln 3} .3^{4t} + C$

(d) $\int 10^{5y}\, dy = \frac{1}{5.\ln 10} .10^{5y} + C$

■ Fungsi Logaritma

(1) Integral fungsi logaritma berbasis 10

$$\int \log(kx)\, dx = x \log(kx) - x \log e + C \qquad (10.8)$$

Contoh 10 - 7
(a) $\int \log (3x)dx = x \log (3x) - x \log e + C$
(b) $\int \log (25x)\, dx = x \log (25x) - x \log e + C$
(c) $\int \log (7x)\, dx = x \log (7x) - x \log e + C$

(2) Integral dari fungsi logaritma berbasis e

$$\int \ln (kx)\, dx = x \ln (kx) - x + C \qquad (10.9)$$

Contoh 10 - 8
(a) $\int \ln (6x)\, dx = x \ln (6x) - x + C$
(b) $\int \ln (3x)\, dx = x \ln (3x) - x + C$
(c) $\int \ln (5x)\, dx = x \ln (5x) - x + C$

10.2.3 Sifat-sifat Integral

1 $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (10.10)

2 $\int \{ f(x) + g(x)\}\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$ (10.11)

Contoh 10 - 9
(a) $\int 5\, x^2\, dx = 5 \int x^2\, dx$ (sifat 10.10)
(b) $\int 10 \ln (3x)\, dx = 10 \int \ln (3x)\, dx$ (sifat 10.10)
(c) $\int 5\, e^x\, dx = 5 \int e^x\, dx$ (sifat 10.10)
(d) $\int (5e^x - 3 \ln x)dx = \int 5e^x dx - \int 3 \ln x)dx$ (sifat 10.11)
(e) $\int (x^2 - 2x + 3)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 3 dx$ (sifat 10.11)

Catatan: Cara menyelesaikan persoalan integral secara umum adalah sebagai berikut: melalui sifat-sifat integral yang ada, bawalah persoalan integral tersebut ke dalam bentuk rumus dasar atau aturan-aturan dasar integrasi, setelah itu, baru diselesaikan atau dipecahkan.

Agar lebih jelas, mengenai bagaimana proses integrasi, yaitu penentuan suatu fungsi yang derivatifnya diketahui, di bawah ini, diberikan beberapa contoh lagi.

Contoh 10 - 10

(a) $\int 5\, e^{3x}\, dx = 5 \int e^{3x}\, dx = 5 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, e^{3x} + C = \frac{5}{3}\, e^{3x} + C$

(b) $\int 2.5^{2x}\,dx = 2\int 5^{2x}\,dx = 2.\ \frac{1}{2.\ln 5}.5^{2x} + C = \frac{1}{\ln 5}.5^{2x} + C$

(c) $\int (x^2 + 2x + 3)\,dx = \int (x^2 + 2x + 3x^0)\,dx$

$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{2}{1+1}x^{1+1} + \frac{3}{0+1}x^{0+1} + C$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$

(d) $\int 5 \log (3x)\,dx = 5\int \log (3x)\,dx$

$= 5\{x \log (3x) - x \log e\} + C$

(e) $\int 2 \log (25x)\,dx = 2\int \log(25x)\,dx$

$= 2\{x \log(25x) - x \log e\} + C$

(f) $\int 5 \ln (3x)\,dx = 5\int \ln(3x)\,dx$

$= 5\{x \ln(3x) - x\} + C$

(g) $\int 10 \ln (6x)\,dx = 10\int \ln(6x)\,dx = 10\{x \ln(6x) - x\} + C$

Contoh 10 - 11

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}} = \int x^{-\frac{2}{5}}\,dx = \frac{1}{-\frac{2}{5}+1}x^{-\frac{2}{5}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{5}}x^{\frac{3}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + C$$

Contoh 10 - 12

$$\int x^2 \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^2 x^{\frac{1}{5}}\,dx = \int x^{2+\frac{1}{5}}\,dx = \int x^{2\frac{1}{5}}\,dx = \int x^{\frac{11}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{11}{5}+1}x^{\frac{11}{5}+1} + C = \frac{1}{\frac{16}{5}}x^{\frac{16}{5}} + C$$

$$= \frac{5}{16}\sqrt[5]{x^{16}} + C = \frac{5}{16}x^3\sqrt[5]{x} + C$$

Contoh 10 - 13

$$\int a^x e^x\,dx = \int (ae)^x\,dx = \frac{(ae)^x}{\ln ae} + C = \frac{(ae)^x}{\ln e + \ln a} + C = \frac{(ae)^x}{1 + \ln a} + C$$

Contoh 10 - 14

$$\int (5e^{3x} - 7^x + e^x - x^{-3} + 2)\,dx = \int 5e^{3x}\,dx - \int 7^x\,dx + \int e^x\,dx - \int x^{-3}\,dx + \int 2\,dx$$

$$= \frac{5}{3}e^{3x} - \frac{7^x}{\ln 7} + e^x + \frac{1}{2x^2} + 2x + C$$

10.2.4 Metode Integrasi

Apabila persoalan Integral sulit dibawa ke dalam bentuk rumus dasar yang ada, maka perlu suatu cara/metode pemecahannya. Metode yang lazim dipakai adalah :(1) Metode uraian, (2) Metode substitusi, (3) Integrasi parsial, dan (4) Integrasi fungsi pecah.

Selanjutnya pada bagian ini, metode integrasi yang dibahas hanyalah, metode uraian, metode substitusi dan metode parsial.

(1) Metode Uraian

Dengan metode ini, suatu integral yang belum berbentuk rumus dasar, integrandnya diuraikan sehingga diperoleh integral dalam bentuk rumus dasar.

Contoh 10 - 15

(a) $\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \, dx = \int (x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx = \int x^2 \, dx - \int 2\sqrt{x} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx$

$$= \int (x^2 \, dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - (2) \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} \sqrt[2]{x^3} + \ln x + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3} x \sqrt{x} + \ln x + C$$

(b) $\int (x - \frac{1}{x})^2 \, dx = . . . ?$

$(x - \frac{1}{x})^2 = x^2 - 2(x)\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$

Sehinga,

$\int (x - \frac{1}{x})^2 \, dx = \int (x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}) \, dx$

$$= \int x^2 \, dx - \int 2 \, dx + \int x^{-2} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 - 2x \; \frac{1}{-1} \; x^{-1} + C \quad \frac{1}{3} x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$$

(c) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} \, dx = ... ?$

$$\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{1 - 2x + x^2}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}$$

Sehingga,

$$\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + x\sqrt{x}\,)\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx - \int 2x^{\frac{1}{2}} + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - (2)\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

$$= 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

(d) $\int \left(\frac{x^2+2x+3}{x}\right)dx \quad = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}\right)\,dx$

$$= \int\left(x + 2 + \frac{3}{x}\right)\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int 2dx + \int \frac{3}{x}\,dx$$

$$= \int x\,dx + 2\int dx + 3\int \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\ln x + C$$

(e) $\int (2x+3)^3\,dx \quad = \int \{(2x)^3 + (3)(2x)^2(3) + (3)(2x)(3^2) + 3^3\}\,dx$

$$= \int (8x^3\,dx + \int 36x^2 + 54x + 27)\,dx$$

$$= \int (8x^3\,dx + \int 36x^2\,dx + \int 54\,x\,dx + \int 27\,dx$$

$$= 8\int (x^3\,dx + 36\int x^2\,dx + 54\int x\,dx + 27\int x^0\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 54.\ \frac{1}{2}x^2 + 27x + C$$

$$= 2x^4 + 12x^3 + 27x^2 + 27x + C$$

(2) Metode Substitusi Sederhana

Salah satu cara untuk membawa persoalan kembali ke dalam bentuk rumus dasar ialah cara substitusi.

Misalkan,

$\int f(x)\,dx$ belum berbentuk rumus dasar.

Ambil substitusi $x = u(z) \rightarrow \frac{dx}{dz} = u'(z) \rightarrow \frac{dx}{dz}\ dx = u'(z)dz$

Sehingga,

$$\int f(x)\,dx = \int f\{u(z)\}.\ u'(z)dz \qquad (10.12)$$

bentuk (10.12) , mungkin sudah berbentuk rumus dasar, sehingga integral dapat diselesaikan.

Contoh 10 – 16

(a) $\int(3x + 1)^{10}\,dx = \ldots?$

Bentuk $(3x + 1)^{10}$ dapat diuraikan, tetapi cukup panjang.
Untuk mudahnya dicoba menyelesaikan dengan metode substitusi.

Misalkan:

$z = 3x + 1$

$\frac{dz}{dx} = 3 \rightarrow dx = \frac{1}{3}dz$

Sehingga,

$$\int (3x + 1)^{10}\,dx = \int z^{10}\ \frac{dz}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int z^{10}\,dz = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{z^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{1}{33}(3x + 1)^{11} + C$$

(b) $\int e^{5x + 2}\,dx = \ldots ?$

Misalkan:

$z = 5x + 2$

$\frac{dz}{dx} = 5 \rightarrow dx = \frac{dz}{5}$

Sehingga,

$$\int e^{5x + 2}\,dx = \int e^z\ \frac{dz}{5} = \frac{1}{5}\int e^z\ dz = \frac{1}{5}\ e^z + C$$

$$= \frac{1}{5}e^{(5x + 2)} + C$$

(c) $\int (x^3 + 2)^2\ 3x^2\ dx = \ldots ?$

Misalkan:

$z = x^3 + 2$

$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dz}{3x^2}$

Sehingga,

$$\int (x^3+2)^2 . 3x^2 \, dx = \int z^2 . 3x^2 . \frac{dz}{3x^2}$$
$$= \int z^2 \, dz$$
$$= \frac{z^3}{3} + C$$
$$= \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$

(d) $\int \frac{8x^2 . dx}{(x^3+2)^3} = \ldots ?$

Misalkan:

$$z = (x^3+2)$$
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dz}{3x^2}$$

Sehingga,

$$\int \frac{8x^2 dx}{(x^3+2)^3} = \int \left(\frac{8x^2}{z^3} . \frac{dz}{3x^2}\right)$$
$$= \int \left(\frac{8}{3} . \frac{1}{z^3}\right) dz = \frac{8}{3} \int z^{-3} \, dz$$
$$= \frac{8}{3} . \frac{z^{-2}}{-2} + C$$
$$= -\frac{4}{3} . \frac{1}{z^2} + C = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + C$$

(e) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \ldots ?$

Misalkan:

$$z = x^3 + 2$$
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 \rightarrow dx = \frac{dz}{3x^2}$$

Sehingga,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \int \frac{x^2}{(x^3+2)^{\frac{1}{4}}} dx$$
$$= \int \frac{x^2}{z^{\frac{1}{4}}} . \frac{dz}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} . dz = \frac{1}{3} z^{-\frac{1}{4}} dz$$
$$= \frac{1}{3} . \frac{z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \left(\frac{4}{9}\right) \sqrt[4]{z^3} + C$$
$$= \left(\frac{4}{9}\right) \sqrt[4]{(x^3+2)^3} + C$$

(f) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \ . \ . \ . \ ?$

Misalkan:

$$z = \ln x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow \quad dx = x \ dz$$

Sehingga,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{z}{x} \ x \ dz = \int z \ dz = \frac{1}{2} z^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

(g) $\int (e^x + 1)^3 \ e^x dx \quad = \ \ldots ?$

Misalkan:

$$z = e^x + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = e^x \rightarrow \quad dx = \frac{dz}{e^x}$$

Sehingga ,

$$\int (e^x + 1)^3 e^x dx = \int z^3 e^x \frac{dz}{e^x} = \int z^3 \ dz$$

$$= \frac{z^4}{4} + C = \frac{(e^x + 1)^4}{4} + C$$

(h) $\int \frac{e^{2x} . dx}{e^{2x} + 1} = \ . \ . \ .?$

Misalkan:

$$z = e^{2x} + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 e^{2x} \rightarrow dx = \frac{dz}{2e^{2x}}$$

Sehingga,

$$\int \frac{e^{2x} \ dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{e^{2x} dz}{z.2e^{2x}} = \int \frac{dz}{2z}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2} \ln z + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (e^{2x} + 1) + C$$

(i) $\int \frac{x . dx}{\sqrt{x + 3}} = \ . \ . \ . \ ?$

Misalkan:

$$z^2 = x + 3 \quad \rightarrow \quad x = z^2 - 3$$

$$z = (x+3)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dx}{dz} = 2z$$

$$2z.dz = dx$$

Sehingga,

$$\int \frac{x.dx}{\sqrt{x+3}} = \int \frac{x.dx}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{x}{(z^2)^{\frac{1}{2}}}.dx$$

$$= \int \frac{x}{z}\ .\ 2z\ \ dz = \int 2x\ dz = 2\int x\ dz$$

$$= 2\int (z^2 - 3)\ dz = 2\int z^2\ dz - 2\int 3\ dz$$

$$= 2.\frac{1}{3}\ z^3 - 2.3z + C$$

$$= 2.\frac{1}{3}.(x+3)^{3/2} - 2.3\ (x+3)^{½} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} - 6\sqrt{x+3} + C$$

$$= \frac{2}{3}\ (x+3)\ \ \sqrt{(x+3)} - 6\sqrt{(x+3)} + C$$

(3) Metode parsial = Integral parsial

Suatu integral apabila integrandnya (yang diintegrasikan) merupakan hasil kali dua derivatif suatu fungsi, maka penyelesaiannya dapat dipakai metode parsial. Untuk lebih jelasnya ikutilah uraian berikut :

Misalkan:

$$f(x) = u(x).\ v(x)$$

Untuk mudahnya bentuk di atas hanya ditulis :

$$f = u.v$$

$$\frac{df}{dx} = (\frac{du}{dx}\ v) + (u\frac{dv}{dx})$$

$$df = (\frac{du}{dx}\ v)dx + (u\frac{dv}{dx})dx$$

$$df = v.du + u.dv$$

Telah diketahui f = u.v, sehingga

$$d(u.v) = v.du + u.dv$$

Integrasikan di kedua ruas:

$$\int d(u.v) = \int v\ du + \int u.dv$$

$$u.v = \int v.du + \int u.dv$$

Jadi,

$$\int u.dv = u.v - \int v.du \qquad (10.13)$$

atau

$$\int v.du = u.v - \int u.dv \qquad (10.14)$$

Contoh 10 - 17

(a) $\int x.\, e^x\, dx = \ldots$?

Misalkan:

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x\, dx \rightarrow v = \int e^x\, dx = e^x$

Sehingga,

$$\int x.\, e^x\, dx = x\,.\, e^x - \int e^x\, dx$$
$$= x\,.\, e^x - e^x + C$$
$$= e^x (x - 1) + C$$

(b) $\int \ln x\, dx = \ldots$?

Misalkan:

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = dx \rightarrow v = \int dx = x$

Sehingga,

$$\int \ln x\, dx = \ln x\, .x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x \ln x - \int dx$$
$$= x \ln x - x + C$$
$$= x (\ln x - 1) + C$$

(c) $\int x^2 \ln x\, dx = \ldots$?

Misalkan,

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x^2\, dx \quad v = \int x^2\, dx = \frac{1}{3}\, x^3$

Sehingga,

$$\int x^2 \ln x\, dx = \int \ln x\, .\, x^2\, dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}\, x^3\, \frac{1}{x} dx)$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - (\frac{1}{3})\, \frac{1}{3}\, x^3 + C$$
$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9}\, x^3 + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 (\ln x - \frac{1}{3}) + C$$

(d) $\int x^2 e^x \, dx = \ldots?$

Misalkan:

$u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$

$dv = e^x \, dx \rightarrow v = \int e^x \, dx = e^x$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int e^x . 2x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2(x.e^x - e^x) + C \\
&= x^2 e^x - 2xe^x + 2 e^x + C \\
&= e^x (x^2 - 2x + 2) + C
\end{aligned}$$

(e) $\int x \sqrt{(x+1)} \, dx = \ldots ?$

Misalkan,

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = (x+1)^{\frac{1}{2}} dx \rightarrow v = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

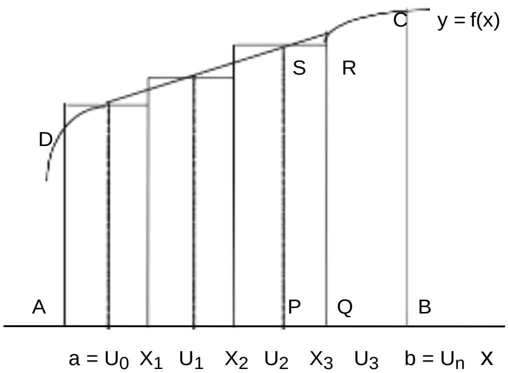
$$= \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
\int x \sqrt{(x+1)} \, dx &= x . \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= x . \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= \frac{2x}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - (\frac{2}{3}) \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (x+1)^{\frac{3}{2}+1} + C \\
&= \frac{2x}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - (\frac{2}{3}) \frac{1}{\frac{5}{2}} (x+1)^{\frac{3}{2}+1} + C \\
&= \frac{2x}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} . \frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\
&= \frac{2x}{3} \sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+1)^5} + C \\
&= \frac{2x}{3} (x+1)\sqrt{(x+1)} - \frac{4}{15} (x+1)^2 \sqrt{(x+1)} + C
\end{aligned}$$

10.3 Integral Tertentu

10.3.1 Pengertian Integral Tertentu



Gambar 10.1

Suatu fungsi y = f(x) kontinu dalam interval $a \le x \le b$.
Interval $a \le x \le b$ dibagi menjadi n interval, misalkan:
$a = u_0 < u_1 < u_2 \, . \, . \, . \, . \, . < u_n = b$ dengan panjang interval :

$$\Delta x_1 = u_1 - u_0$$

$$\Delta x_2 = u_2 - u_1$$

M M M

$$\Delta x_i = u_i - u_{i-1}$$

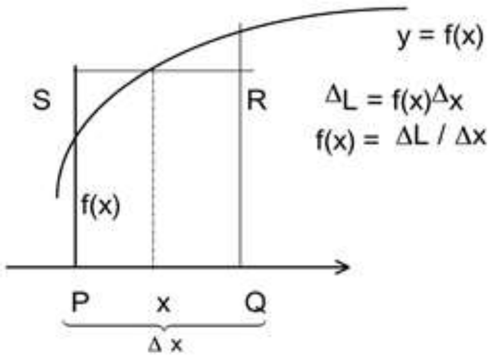
Di dalam setiap interval yang panjangnya Δx dapat dipilih suatu titik x sedemikian sehingga dapat dibuat jumlahan dari f(x). Δx, ialah:

$f(x_1). \Delta x_1 + \Delta x_2 +$ □+ $\Delta x_n =$ $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ jumlah ini disebut sebagai integral fungsi y = f(x) pada interval $a \le x \le b$.

Bila pada $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ diambil limitnya untuk $n \to \infty$ dan $\Delta x_i \to 0$ maka didapat :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = L$$ $\to$ menyatakan luas daerah ABCD

Pandang satu potong/bagian dari bidang ABCD. Misalkan yang diambil adalah bidang PQRS



Gambar 10.2

Bila diambil limitnya untuk $\Delta x \to 0$, maka didapat :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{dL}{dx}$$

$$f(x\} = \frac{dL}{dx} \to dL = f(x)\,dx$$

$$\int dL = \int f(x)\,dx$$

$$L(x) = \int_a^x f(x)dx$$

Berarti L(x) merupakan integral dari f(x) dx

$$L(b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$L(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Misalkan,

$$\int_a^x f(x) = F(x) + C \text{ atau } \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Sehingga,

$$L(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$L(a) = \int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0 \to F(a) + C = 0 \to C = -F(a)$$

$$L(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C$$

$$= F(b) - F(a)$$

didapat,

$$L(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Jadi,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{bila } \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (10.15)$$

a = batas bawah, b = batas atas

10.3.2 Sifat-sifat Integral Tertentu

Jika f(x) dan g(x) keduanya adalah fungsi kontinu dalam interval $a \leq x \leq b$ maka :

1. $$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (10.16)$$
2. $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (10.17)$$
3. $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (10.18)$$
4. $$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (10.19)$$
5. $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad (10.20)$$

   bila c di dalam interval $a \leq x \leq b$

Contoh 10 - 18

(a) $\int_0^2 (4x+3)dx$ = ...?

$$= 2x^2 + 3x\Big]_0^2$$
$$= (2.2^2 + 3.2) - (2.0^2 + 3.0)$$
$$= 14$$

(b) $\int_{1}^{2}(3x^2+2x+7)dx = \ldots ?$

$= x^3 + x^2 + 7x\Big]_1^2$

$= (2^3 + 2^2 + 7.2) - (1^3 + 1^2 + 7.1)$

$= 26 - 9$

$= 17$

(c) $\int_{2}^{8}\frac{dx}{(x+2)} = \ldots ?$

$= \ln(x+2)\Big]_2^8$

$= [\ln(8+2) - \ln(2+2)] = \ln 10 - \ln 4$

$= \frac{10}{4}$

$= \ln 2{,}5$

(d) $\int_{1}^{e}\ln x\,dx = \ldots\ldots ?$

$= (x\ln x - x)\Big]_1^e$

$= x(\ln x - 1)\Big]_1^e$

$= e(\ln e - 1) - 1(0 - 1)$

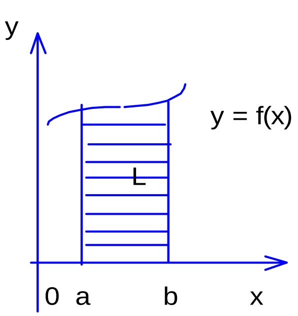
$= e(1 - 1) - 1(-1) = 1$

10.4 Menghitung Luas Bidang Datar

Salah satu kegunaan dari integral tertentu yaitu menghitung luas bidang datar

(1) Luas bidang datar yang dibatasi oleh satu grafik fungsi

(a) Terhadap sumbu x

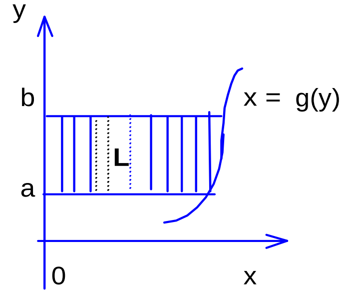


Gambar 10.3

Luas daerah yang diarsir (L) yaitu daerah yang dibatasi oleh sumbu x dengan grafik y = f(x) adalah :

$$L = \left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \qquad (10.21)$$

(b) Terhadap sumbu y



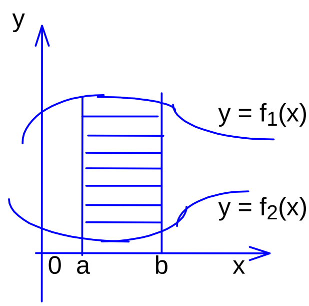
Gambar 10.4

Luas daerah yang diarsir (L) yaitu luas daerah yang dibatasi oleh sumbu y dengan grafik x = g(y) adalah :

$$L = \left| \int_a^b g(y)dy \right| \qquad (10.22)$$

(2) Luas bidang datar yang dibatasi oleh dua grafik fungsi

(a) Terhadap sumbu x

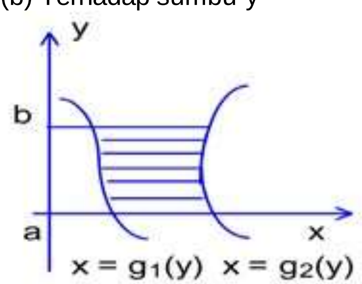


Gambar 10.5

Luas daerah yang diarsir (L), yaitu luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f_1(x)$ dan $y = f_2(x)$ adalah

$$L = \left| \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}dx \right| \qquad (10.23)$$

(b) Terhadap sumbu y



Gambar 10.6

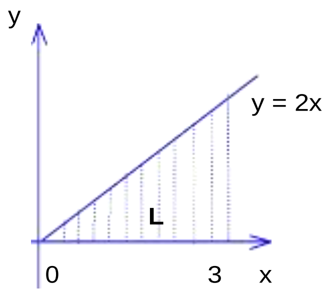
Luas daerah yang diarsir (L) yaitu luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $x = g_1(y)$ dan $x = g_2(y)$ adalah

$$L = \left| \int_a^b \{g_2(y) - g_1(y)\}dy \right| \qquad (10.24)$$

Contoh 10 - 19

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis y = 2x, y = 0 dan x = 3.

Penyelesaian



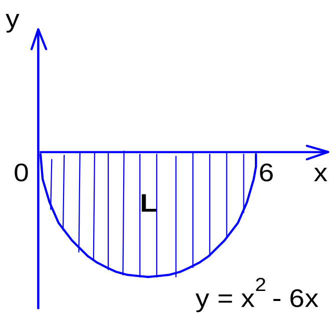
Gambar 10.7

$$L = \left| \int_0^3 f(x)\,dx \right|$$
$$= \left| \int_0^3 2x\,dx \right|$$
$$= \left| \Big[x^2 \Big]_0^3 \right|$$
$$= 3^2 = 9$$

Contoh 10 - 20

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh grafik $y = x^2 - 6x$ dan sumbu x.

Penyelesaian



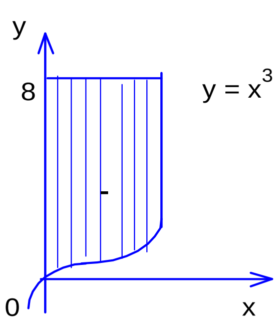
Gambar 10.8

$$L = \left| \int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^6 \right|$$
$$= \left| \frac{1}{3}.6^3 - 3.6^2 \right|$$
$$= | 72 - 108 |$$
$$= | -36 | = 36$$

Contoh 10 - 21

Carilah luas daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^3$ dan sumbu y dari $y = 0$ sampai $y = 8$.

Penyelesaian



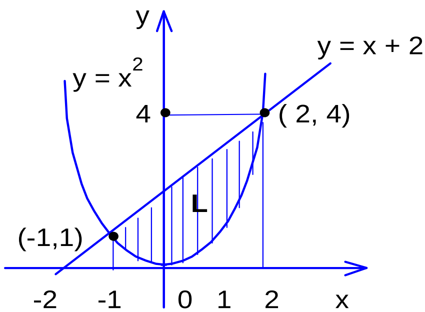
Gambar 10.9

$$y = x^3 \rightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$$
$$L = \left| \int_0^8 y^{\frac{1}{3}}\,dy \right|$$
$$= \left| \left[\frac{3}{4} y \sqrt[3]{y} \right]_0^8 \right|$$
$$= \left| \frac{3}{4}.8\sqrt[3]{8} = \frac{3}{4}.16 \right|$$
$$= 12$$

Contoh 10 - 22

Tentukanlah luas bidang datar yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x + 2$.

Penyelesaian



Gambar 10.10

$y = f_1(x) = x + 2$

$y = f_2(x) = x^2$

$$L = \left| \int_{-1}^{2} \{f_1(x) - f_2(x)\}dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx \right|$$

$$= \left| \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} \Big|$$

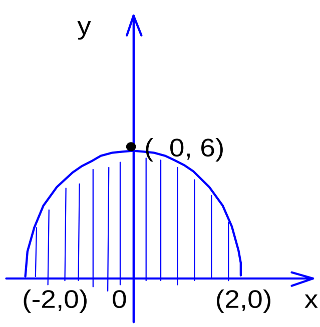
$$= \left| (2 + 4 - \tfrac{8}{3}) - (\tfrac{1}{2} - 2 + \tfrac{1}{3}) \right|$$

$$= \frac{9}{2}$$

Contoh 10 - 23

Hitunglah luas bidang datar yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 4$ dan sumbu x.

Penyelesaian



Gambar 10.11

$$L = \left| \int_{-2}^{2} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx \right|$$

$$= \left| -\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^{2} \Big|$$

$$= \left| (-\tfrac{2^3}{3} + 8) - \{-\tfrac{(-2)^3}{3} + 4(-2)\} \right|$$

$$= \left| -\tfrac{8}{3} + 8 - \tfrac{8}{3} + 8 \right|$$

$$= \frac{32}{3}$$

Catatan : untuk menghitung luas daerah, sangatlah perlu untuk menggambar grafik fungsi pada interval yang bersangkutan.

Soal-soal Latihan

10 - 1 Hitunglah harga dari :

(a) $\int 2\, dx$

(b) $\int (2x^2 + 5x + 2)\, dx$

(c) $\int (1 - t)^2\, dt$

(d) $\int 10^{x}\, dx$

(e) $\int e^{15x}\, dx$

(f) $\int x \sqrt{2 + 3x^2}\, dx$

(g) $\int (2x^2 . \ln x)\, dx$

(h) $\int 3^{2x}\, dx$

(i) $\int x \sqrt{x^2 - 2}\, dx$

(j) $\int 2x(x^2 - 1)^3\, dx$

(k) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

(l) $\int \frac{4x^2}{x^3 + 8}\, dx$

(m) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3x^2}\, dx$

(n) $\int x^5 \sqrt{(2 + x^3)}\, dx$

10 - 2 Carilah harga dari :

(a) $\int_0^2 (3x^2 - 3x + 7)\, dx$

(b) $\int_1^4 (\frac{dx}{\sqrt{x}})$

(c) $\int_{-2}^4 (x^3 + 2x)\, dx$

(d) $\int_0^4 (y^3 - y^2 + 1)\, dy$

(e) $\int_0^5 2\, dx$

(f) $\int_1^4 (x - 2)\, dx$

(g) $\int_{-1}^1 (v + 2)^2 dv$

(h) $\int_1^2 (x^2 + 1)^2 dx$

(i) $\int_{-1}^2 (1 - t^2) t . dt$

(j) $\int_1^2 (\frac{dx}{x^2})$

(k) $\int_1^{64} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})\, dx$

(l) $\int_a^{2a} (a^3 + 3ax^2 + x^3)\, dx$

10 - 3 Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh:

(a) Kurva $y = x^2$ dan $y = x$

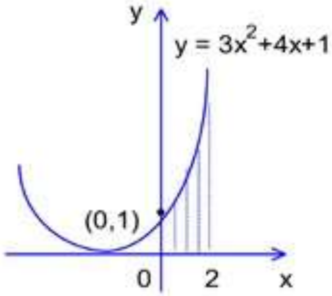
(b) Kurva $y = x^3$ dan $y = 2x^2$

(c) Kurva $y = x^2$, sumbu x dan garis-garis $x = 1$ dan $x = 3$.

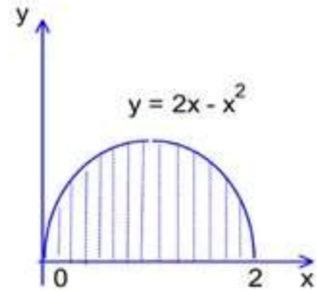
(d) Kurva $y = x^2 + 1$, sumbu x, garis $x = 0$ dan $x = 3$.

10 - 4 Tentukanlah luas daerah yang diarsir berikut ini :

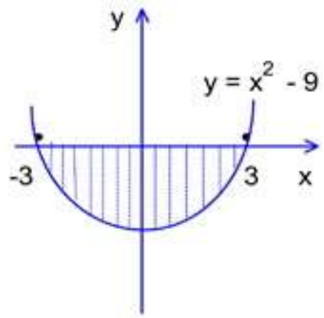
(a)



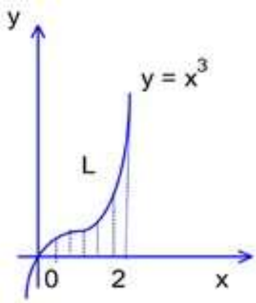
(b)



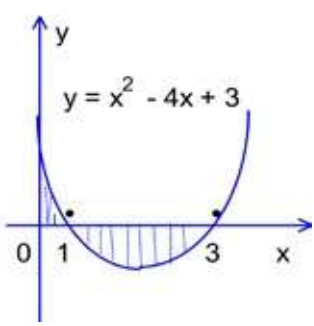
(c)



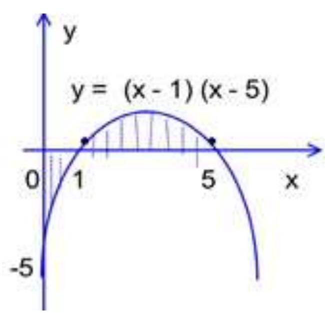
(d)



(e)



(f)



APLIKASI INTEGRAL DALAM EKONOMI DAN BISNIS

11.1 Pengantar

Di dalam bab ini akan dipelajari mengenai aplikasi hitung integral dalam ekonomi dan bisnis, yaitu mencari fungsi asal dari fungsi marginalnya (fungsi turunannya). Mencari fungsi penerimaan total dari fungsi penerimaan marginal, fungsi biaya total dari fungsi biaya marginal. Mencari fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal, fungsi tabungan dari fungsi tabungan marginal dan fungsi kapital dari fungsi investasi. Penentuan fungsi asal dari fungsi marginalnya merupakan aplikasi integral tak tentu dalam ekonomi dan bisnis.

Di samping itu dalam bab ini akan dipelajari juga konsumen surplus dan produsen surplus, tambahan pendapatan dan pembentukan modal yang merupakan aplikasi integral tertentu dalam ekonomi dan bisnis.

Tujuan bab ini. Setelah mempelajari bab ini peserta didik (mahasiswa) diharapkan mampu menerapkan hitung integral dalam ekonomi dan bisnis.

11.2 Aplikasi Integral Tak Tentu dalam Ekonomi dan Bisnis

Pada umumnya aplikasi disini berkaitan dengan mencari atau menentukan fungsi-fungsi ekonomi yang merupakan fungsi primitif (fungsi asal) dari fungsi marginalnya. Mencari fungsi penerimaan total dari fungsi penerimaan marginal, fungsi biaya total dari fungsi biaya marginal, fungsi konsumsi dari fungsi konsumsi marginal, fungsi tabungan dari fungsi tabungan marginal serta fungsi kapital dari fungsi investasi.

■ **Fungsi Penerimaan Total (R)**

Fungsi penerimaan total merupakan Integral dari penerimaan marginalnya, dan sebaliknya penerimaan marginal merupakan turunan pertama dari fungsi penerimaan total.

$$R = \int MR \, dQ \tag{11.1}$$

■ **Fungsi Biaya Total (C)**

Fungsi biaya total merupakan integral dari biaya marginalnya, dan sebaliknya biaya marginal merupakan turunan pertama dari fungsi biaya total.

$$C = \int MC \, dQ \tag{11.2}$$

■ **Fungsi Konsumsi (C)**

Fungsi konsumsi merupakan Integral dari konsumsi marginalnya (MPC), dan sebaliknya konsumsi marginal merupakan turunan pertama dari fungsi konsumsi.

$$C = \int MPC \, dY \tag{11.3}$$

■ **Fungsi Tabungan (S)**

Fungsi tabungan merupakan Integral dari tabungan marginalnya (MPS), dan sebaliknya tabungan marginal merupakan turunan pertama dari fungsi tabungan.

$$S = \int MPS \, dY \tag{11.4}$$

■ **Fungsi Pembentukan Modal (K)**

Fungsi (pembentukan) modal atau fungsi (pembentukan) kapital merupakan Integral dari (aliran) investasi bersih (I) dan sebaliknya investasi bersih merupakan turunan pertama dari fungsi kapital.

$$K_t = \int I(t)dt \tag{11.5}$$

Agar lebih jelas bagaimana fungsi asal dapat didapat melalui integrasi fungsi marginalnya, di bawah ini diberikan beberapa contoh. Untuk dapat membedakan konsumsi (C), biaya total (C) dengan tetapan/konstanta integrasi (C), khusus dalam integrasi biaya marginal dan konsumsi marginal, maka tetapan integrasi disimbolkan dengan K.

Contoh 11 - 1

Biaya Marginal ditunjukkan oleh MC = 150 – 80Q + 10Q^2. Biaya tetapnya adalah 134. Carilah fungsi biaya totalnya, fungsi biaya rata-rata dan fungsi biaya variabelnya

Penyelesaian

Fungsi biaya total,

$$C = \int MC\, dQ$$
$$= \int (150 - 80Q + 10Q^2)\, dQ$$
$$= 150Q - 40Q^2 \; \frac{10}{3} Q^3 + K$$

(K = Konstanta Integrasi)

Bila Q = 0 dimasukkan ke dalam fungsi C = f(Q), didapat biaya tetap (FC) sebagai berikut :

$$FC = 150(0) + 40(0)^2 + \frac{10}{3}(0)^3 + K$$
$$K = FC = 134$$

Jadi, fungsi biaya totalnya adalah

$$C = 150Q - 40Q^2 + \frac{10}{3} Q^3 + 134$$

Fungsi biaya rata-ratanya

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{150Q - 40Q^2 + \frac{10}{3}Q^3 + 134}{Q}$$
$$= 150 - 40Q + Q^2 + \frac{134}{Q}$$

Fungsi biaya variabel

$$VC = C - FC$$
$$= (150Q - 40Q^2 + \frac{10}{3} Q^3 + 134) - 134$$
$$= 150Q - 40Q^2 + \frac{10}{3} Q^3$$

Contoh 11 - 2

Penerimaan marginal ditunjukkan oleh MR = 20 – 4Q
(Q = kuantitas barang)
Tentukanlah :
(a) Fungsi penerimaan totalnya.
(b) Fungsi permintaannya.

Penyelesaian

(a) Fungsi penerimaan total,

$$R = \int MR\, dQ$$
$$= \int (20 - 4Q) dQ$$
$$= 20Q - 2Q^2 + C$$

Bila Q = 0, maka R = 0. Selanjutnya nilai C (konstanta Integrasi) dicari dengan memasukkan Q = 0 dan R = 0 ke dalam persamaan di atas akan didapat nilai C sebagai berikut:

$R = 20Q - 2Q^2 + C$
$0 = 20\,(0) - 2\,(0)^2 + C$
$C = 0$

Jadi, fungsi penerimaan totalnya adalah

$R = f(Q)$
$= 20Q - 2Q^2 + C$
$= 20Q - 2Q^2$

(b) Fungsi permintaannya

$R = QP \rightarrow \qquad P = \dfrac{R}{Q} = \dfrac{20Q - 2Q^2}{Q}$

$P = 20 - 2Q \Leftrightarrow Q = -\tfrac{1}{2}P + 10$

Jadi, fungsi permintaannya adalah $Q_d = -\tfrac{1}{2}P + 10$

Contoh 11 - 3
Hasrat marginal untuk konsumsi (MPC) adalah 0,8. Bila pendapatan nol (Y = 0) maka besarnya konsumsi adalah 50.
Tentukanlah fungsi konsumsinya.

Penyelesaian

$C = \int MPC\, dY$
$= \int 0{,}8\, dY$
$= 0{,}8Y + K$

Selanjutnya dicari terlebih dahulu nilai K (konstanta Integrasi) dengan memasukkan Y = 0 dan C (konsumsi) = 50, ke dalam persamaan di atas akan didapat K sebagai berikut :

$C = 0{,}8\, y + K$
$50 = 0{,}8\,(0) + K$
$K = 50$

Jadi, **fungsi konsumsinya**

$C = f(Y)$
$= 0{,}8\, Y + K$
$= 0{,}8Y + 50$

Contoh 11 - 4
Hasrat marginal untuk konsumsi (MPC) adalah MPC = 0,6 + $\frac{0,1}{\sqrt{Y}}$. Apabila pendapatan nol (Y = 0), konsumsinya sebesar 10.
Tentukanlah fungsi konsumsinya.

Penyelesaian
Fungsi konsumsinya

$$C = \int MPC\ dY$$
$$= \int\left(0,6 + \frac{0,1}{\sqrt{Y}}\right) dY$$
$$= (0,6 + 0,1Y^{-\frac{1}{2}})dY$$
$$= 0,6Y + \frac{0,1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot Y^{-\frac{1}{2}+1} + K$$
$$= 0,6Y + \frac{0,1}{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}} + K$$
$$= 0,6Y + 0,2\sqrt{Y} + K$$

Selanjutnya dicari terlebih dahulu nilai (K = konstanta Integrasi) dengan memasukkan Y = 0 dan C (konsumsi) = 10 ke dalam persamaan di atas didapat K sebagai berikut :

$$C = 0,6Y + 0,2\sqrt{Y} + K$$
$$10 = 0,6\ (0) + 0,2\sqrt{0} + K$$
$$K = 10$$

Jadi, **fungsi konsumsinya**,

$$C = f(Y)$$
$$= 0,6Y + 0,2\sqrt{Y} + K$$
$$= 0,6Y + 0,2\sqrt{Y} + 10$$

Contoh 11 - 5
Hasrat marginal untuk menabung, MPS = 0,25
Bila pendapatan nasional 100, terjadi tabungan negatif sebesar 10.
Tentukanlah fungsi tabungan dan konsumsinya.

Penyelesaian

MPS = 0,25
S = f(Y)?
$S = \int MPS\ dY$
$= \int (0,25)\ dY$
$= 0,25Y + K$

Selanjutnya dicari terlebih dahulu nilai (K = konstanta integrasi) dengan memasukkan Y = 100 dan S = - 10 ke dalam persamaan di atas didapat K sebagai berikut :

$$S = 0,25Y + K$$
$$-10 = 0,25\,(100) + K$$
$$-10 = 25 + K$$
$$K = -35$$

Jadi, **fungsi tabungannya**

$$S = f(Y)$$
$$= 0,25Y + K$$
$$= 0,25Y - 35 = -35 + 0,25Y$$

Fungsi konsumsinya

$$Y = C + S$$
$$C = Y - S$$
$$= Y - (-35 + 0,25Y)$$
$$= y + 35 - 0,25Y$$
$$= 35 + 0,75Y$$

Contoh 11- 6

Tingkat investasi bersih, I = f(t) = 20 $t^{2/5}$ dan stok kapital (modal) pada awal tahun, t = 0 adalah 75 .

Tentukanlah fungsi kapitalnya

Penyelesaian

$$I(t) = 20\,t^{2/5}$$
$$K_t = \int I(t)\,dt = 20 \int t^{2/5}\,dt$$
$$= \frac{20}{1+\frac{2}{5}}\,t^{\frac{2}{5}+1} + C$$
$$= \frac{20}{\frac{7}{5}}\,t^{\frac{7}{5}} + C = \frac{100}{7}\,t^{\frac{7}{5}} + C$$

Selanjutnya dicari terlebih dahulu nilai C (konstanta integrasi) dengan memasukkan nilai t = 0 dan K_t = 75, ke dalam persamaan di atas didapat nilai C sebagai berikut :

$$K_t = \frac{100}{7}.t^{\frac{7}{5}} + C$$
$$75 = \frac{100}{7}(0)^{\frac{7}{5}} + C$$
$$75 = C$$

Jadi, fungsi Kapitalnya

$K_t = f(t) = \frac{100}{7} t^{\frac{7}{5}} + 75$

Contoh 11 - 7

Tingkat investasi bersih adalah I = 50 $t^{2/3}$ dan stok kapital pada tahun pertama (t =1) adalah 150. Carilah fungsi kapitalnya. Selanjutnya berapakah besar kapital pada tahun ke empat.

Penyelesaian

$I = 50\, t^{2/3}$

$K_t = \int I(t)\, dt$

$= \int (50\, t^{2/3})\, dt = 50 \int t^{2/3}\, dt$

$= \frac{50}{\frac{2}{3}+1} t^{\frac{2}{3}+1} + C$

$= \frac{50}{\frac{5}{3}} t^{\frac{5}{3}} + C$

$= 30 t^{\frac{5}{3}} + C$

Dicari terlebih dahulu nilai C (konstanta Integrasi) dengan memasukkan t = 1 dan K_t = 150 ke dalam persamaan di atas, didapat nilai C sebagai berikut :

$K_t = 30 t^{\frac{5}{3}} + C$

$150 = 30 (1)^{\frac{5}{3}} + C$

$150 = 30(1) + C$

$C = 120$

Jadi, fungsi kapitalnya

$K_t = f(t)$

$= 30 t^{\frac{5}{3}} + C$

$= 30 t^{\frac{5}{3}} + 120$

Besarnya kapital pada tahun keempat (t = 4)

$K_t = 30 t^{\frac{5}{3}} + 120$

$= 30(4)^{\frac{5}{3}} + 120$

$= 30(10{,}07) + 120$

$= 422{,}1$

Contoh 11 – 8

Biaya marginal untuk memproduksi sejenis barang

$$MC = 3Q^2 – 24Q + 45$$

Jika untuk memproduksi 1 unit barang diperlukan biaya 44.
Tentukanlah :

(a) Fungsi biaya totalnya.
(b) Besar biaya total, biaya rata-rata serta biaya marginal pada saat output 2 unit.

Penyelesaian

(a) Fungsi biaya total,

$$\begin{aligned} C &= \int (MC)dQ \\ &= \int (3Q^2 – 24Q + 45)dQ \\ &= Q^3 – 12Q^2 + 45Q + K \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai K (konstanta integrasi) dicari terlebih dahulu dengan memasukkan Q = 1 dan C (biaya) = 44 ke dalam persamaan di atas didapat :

$$\begin{aligned} C &= Q^3 – 12Q^2 + 45Q + K \\ 44 &= (1)^3 - 12(1)^2 + 45(1) + K \\ K &= 44 - 34 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Jadi, **fungsi biaya totalnya**

$$\begin{aligned} C &= Q^3 – 12Q^2 + 45Q + K \\ &= Q^3 – 12Q^2 + 45Q + 10 \end{aligned}$$

(b) Besarnya biaya total, bila Q = 2

$$\begin{aligned} C &= Q^3 – 12Q^2 + 45Q + 10 \\ &= (2)^3 - 12(2)^2 + 45(2) + 10 = 60 \end{aligned}$$

Besarnya biaya rata-rata, bila Q = 2

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{Q^3 - 12Q^2 + 45Q + 10}{Q}$$

$$= Q^2 - 12Q + 45 + \frac{10}{Q}$$

$$Q = 2 \rightarrow AC = (2)^2 - 12(2) + 45 = 30$$

Besarnya biaya marginal, bila Q = 2

$$MC = 3Q^2 – 24Q + 45 = 3(2)^2 - 24(2) + 45 = 9$$

Contoh 11 - 9

Seorang monopolis memiliki fungsi

$$MR = 16 – 5Q$$
$$MC = 4Q - 2$$
$$FC = 10$$

Q = kuantitas output dan P = harga per unit output. Apabila si monopolis menghendaki keuntungan/laba yang maksimum,
Pertanyaan,
(a) Berapa unitkah sebaiknya berproduksi dan dengan harga berapa tiap unit *output* dijual .
(b) Berapa keuntungan maksimumnya?

Penyelesaian

$MR = 16 – 5Q \rightarrow R'' = - 5$

$R = \int MR.dQ$

$= \int(16 - 5Q)dQ$

$= 16Q - \frac{5}{2} Q^2 + K$

$= \frac{5}{2} Q^2 + 16Q + K$

Bila Q = 0 , maka R = 0, selanjutnya nilai K (konstanta Integrasi) dicari terlebih dahulu dengan memasukkan Q = 0, R = 0 ke dalam persamaan di atas, didapat :

$R = 16Q - \frac{5}{2} Q^2 + K$

$0 = 16(0) - \frac{5}{2} (0)^2 + K$
$K = 0$

Jadi, $R = 16Q - \frac{5}{2} Q^2 + 0$

$R = - \frac{5}{2} Q^2 + 16Q$

$MC = 4Q – 2 \rightarrow C'' = 4$

$C = \int MC.dQ$

$= \int(4Q - 2)dQ$

$= 2Q^2 – 2Q + K$

Bila Q = 0, maka C = FC = 10. Selanjutnya nilai K (konstanta integrasi) dicari terlebih dahulu dengan memasukkan Q = 0, C = 10 ke dalam persamaan di atas, didapat:

$C = 2Q^2 – 2Q + K$
$10 = 2(0)^2 - 2(0) + K$
$10 = K$

Jadi, $C = 2Q^2 – 2Q + K$
$= 2Q^2 – 2Q + 10$

Fungsi keuntungan/laba.

$$\pi = R - C$$
$$= (16Q - \frac{5}{2} Q^2) - (2Q^2 – 2Q + 10)$$
$$= - \frac{9}{2} Q^2 + 18Q - 10$$

Keuntungan/laba akan maksimum bila dipenuhi dua dengan syarat :

(1) $MR = MC \rightarrow 16Q – 5Q = 4Q - 2$
$9Q = 18$
$Q = 2$

(2) $R'' < C'' \rightarrow R'' = -5 < C'' = 4$ (Laba maksimum pada Q = 2)

Keuntungan/laba maksimumnya.

$$\pi = - \frac{9}{2} Q^2 + 18Q - 10$$

$$\pi_{(maks)} = -\frac{9}{2}(2)^2 + 18(2) - 10 \qquad \text{(masukkan Q = 2)}$$

$$= -18 + 36 - 10$$

$$= 8$$

Besarnya harga per unit output (P)

$$R = QP$$

$$P = \frac{R}{Q}$$

$$= \frac{-\frac{5}{2}Q^2 + 16Q}{Q}$$

$$= 16 - \frac{5}{2}Q$$

$$= 16 - \frac{5}{2}(2) = 11$$

Jadi,

(a) Untuk mendapatkan laba yang maksimum, seharusnya si monopolis berproduksi sebanyak 2 unit, dengan harga jual per unit adalah 11.

(b) Keuntungan maksimum yang akan diperolehnya sebesar 8.

Contoh 11 - 10

Fungsi MPS suatu masyarakat adalah MPS = 0,3 - $\frac{1}{4\sqrt{Y}}$

Bila pada tingkat pendapatan masyarakat nol (Y = 0), maka tabungannya minus 10.

Ditanyakan :

(a) Fungsi tabungannya.

(b) Fungsi MPC –nya.

(c) Fungsi konsumsinya.

(d) Kalau pendapatan masyarakat tersebut 100, hitunglah besarnya MPC dan tingkat konsumsinya.

Penyelesaian

(a) $MPS = 0,3 - \frac{1}{4Y} = 0,3 - \frac{1}{4.Y^{\frac{1}{2}}} = 0,3 - \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{4}$

Fungsi tabungannya

$$S = \int MPS\, dY$$

$$= \int (0,3 - \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{4})dY$$

$$= 0,3Y - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,\frac{Y^{-\frac{1}{2}+1}}{4} + K$$

$$= 0{,}3Y - \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{Y^{\frac{1}{2}}}{4} + K \;=\; 0{,}3Y - \frac{1}{2}\sqrt{Y} + K$$

Dicari terlebih dahulu nilai K (konstanta Integrasi) dengan memasukkan Y = 0 dan S = - 10, kedalam persamaan di atas didapat nilai K sebagai berikut :

$$S = 0{,}3Y - \frac{1}{2}\sqrt{Y} + K$$

$$-10 = 0{,}3(0) - \frac{1}{2}\sqrt{0} + K$$

$$-10 = K$$

Jadi, **fungsi tabungannya** adalah :

S = f(Y)

$$S = 0{,}3Y - \frac{1}{2}\sqrt{Y} + K$$

$$S = 0{,}3\,Y - \frac{1}{2}\sqrt{Y} - 10$$

(b) **Fungsi MPC - nya**

MPC + MPS = 1

MPC = 1 - MPS

$$MPC = 1 - \left(0{,}3 - \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{4}\right) = 0{,}7 + \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{4} = 0{,}7 + \frac{1}{4\sqrt{Y}}$$

(c) Fungsi konsumsi

$C = \int MPC\ dY$

$$= \int \left(0{,}7 + \frac{Y^{-\frac{1}{2}}}{4}\right)dY = 0{,}7Y + \frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)}\frac{Y^{-\frac{1}{2}+1}}{4} + K$$

$$= 0{,}7Y + \frac{1}{2}Y^{\frac{1}{2}} + K \qquad (*)$$

Terlebih dahulu dicari nilai C (Konsumsi). Nilai C ini didapat dengan memasukkan Y = 0 dan S = - 10 ke dalam persamaan berikut :

Y = C + S

0 = C - 10

C = 10

Barulah kemudian dicari nilai K (konstanta Integrasi), dengan memasukkan C = 10 dan Y = 0 ke dalam persamaan (*) didapat,

$$C = 0{,}7Y + \frac{1}{2}Y^{\frac{1}{2}} + K$$

$$10 = 0{,}7\,(0) + \frac{1}{2}(0)^{\frac{1}{2}} + K$$

$$10 = K$$

Jadi, **fungsi konsumsinya**

$$C = 0{,}7Y + \frac{1}{2}\sqrt{Y} + 10$$

(d) Bila Y = 100, MPC = ... ? C = ...?

$$MPC = 0{,}7 + \frac{1}{4\sqrt{Y}} \qquad C = 0{,}7Y + \frac{1}{2}\sqrt{Y} + 10$$

$$= 0{,}7 + \frac{1}{4\sqrt{100}} \qquad = 0{,}7(100) + \frac{1}{2}\sqrt{100} + 10$$

$$= 0{,}70 + \frac{1}{40} = 0{,}725 \qquad = 70 + 5 + 10 = 85$$

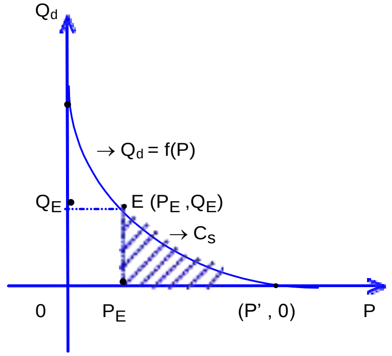
Jadi, besarnya MPC = 0,725 dan konsumsi masyarakat 85.

11.3 Aplikasi Integral Tertentu dalam Ekonomi dan Bisnis

11.3.1 Konsumen Surplus (C_s)

Konsumen surplus adalah suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu dikarenakan konsumen tersebut dapat membeli barang/jasa dengan harga lebih murah dari pada yang sanggup mereka bayar. Harga yang sanggup mereka bayar, ditunjukkan oleh fungsi permintaannya yaitu sebesar OP’ (= P’), sedangkan harga per unit yang harus mereka bayar diperlihatkan oleh harga pasar yaitu Op_E (= P_E). Selisih antara harga yang mampu/sanggup dibayar (OP’) dengan harga pasar (P_E) disebut keuntungan surplus tiap unit barang

Secara geometris, besarnya konsumen surplus secara total ditunjukkan oleh luas daerah di kiri bawah kurva permintaan tapi di atas (di sebelah kanan) harga pasar (lihat luas daerah yang diarsir), pada Gambar 11.1.



Gambar 11.1

Besarnya surplus konsumen secara total ditunjukkan oleh luas bangun $\mathbf{p_E}$ **p’ E**, yaitu luas daerah yang diarsir, yang dapat dihitung dengan rumus:

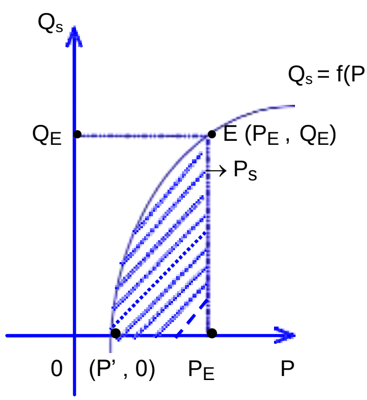
$$C_S = \quad \ldots \tag{11.6}$$

11.3.2 Produsen Surplus (P_S)

Produsen surplus adalah suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen tertentu dikarenakan produsen tersebut dapat menjual barangnya dengan harga lebih tinggi dari harga yang sanggup mereka jual.

Harga yang sanggup mereka jual ditunjukkan oleh fungsi penawarannya yaitu sebesar OP' (= P'), sedangkan tingkat harga yang terjadi di pasar (harga mereka harus jual) ditunjukkan oleh OP_E (= P_E). Selisih antara harga pasar (P_E) dengan harga yang sanggup mereka jual (P'), merupakan keuntungan surplus tiap unit barang.

Secara geometris, besarnya surplus produsen secara total ditunjukkan oleh luas daerah yang berada di kanan bawah kurva penawaran, tetapi di sebelah kiri harga pasar (lihat luas daerah yang diarsir), pada Gambar 11.2.



Gambar 11.2

Besarnya surplus produsen secara total ditunjukkan oleh luas bangun **P_E E P'**, yaitu luas daerah yang diarsir, yang dapat dihitung dengan rumus:

$$P_s = \quad \ldots \tag{11.7}$$

Catatan :

(1) Bila fungsi permintaannya dinyatakan dalam bentuk P = f(Q_d), maka konsumen surplus dihitung dengan rumus :

$$C_s = \quad \ldots \; - P_E Q_E \tag{11.8}$$

(2) Bila fungsi penawarannya dinyatakan dalam bentuk $P = f(Q_s)$, maka produsen surplus dihitung dengan rumus :

$$P_s = P_E Q_E - \text{[illegible]} \qquad (11.9)$$

Contoh 11 - 11

Fungsi permintaan terhadap sejenis barang, $Q_d = 5 - \frac{1}{3}P$

P = harga per unit barang, Q_d = kuantitas barang yang diminta

(a) Tentukanlah konsumen surplus pada tingkat harga keseimbangan pasar 9 per unit.

(b) Gambar grafiknya.

Penyelesaian

(a) Bila $P_E = 9 \rightarrow Q_E = \ldots.?$

$P_E = 9 \rightarrow Q_d = 5 - \frac{1}{3}P$

$Q_E = 5 - \frac{1}{3}(9)$ (gantikan P dengan $P_E = 9$)

$= 5 - 3$

$= 2$

$P_E = 9$, maka $Q_E = 2 \rightarrow E(P_E, Q_E) = E(9, 2)$

Harga per unit barang tertinggi (P’) yang bersedia dibayar oleh konsumen, diperoleh bila $Q_d = 0$ (mendekati nol, dan dianggap nol).

$Q_d = 0 \rightarrow Q_d = 5 - P$

$0 = 5 - P$

$-5 = -P$

$P = 15 \approx P' = 15$

Konsumen surplus

$$C_s = \int_{P_E}^{P'} f(P)dP$$

$$= \int_9^{15} \left(5 - \tfrac{1}{3}P\right)dP = \left. 5P - \tfrac{1}{6}P^2 \right]_9^{15}$$

$$= \left\{5(15) - \tfrac{1}{6}(15)^2\right\} - \left\{5(9) - \tfrac{1}{6}(9)^2\right\}$$

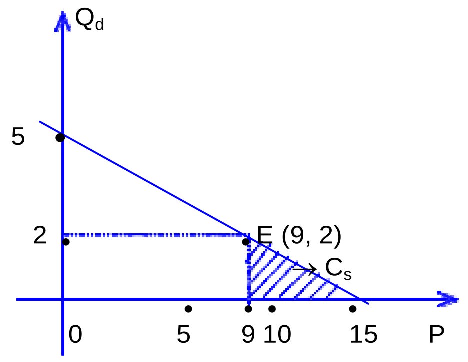
$$= \frac{225}{6} - \frac{189}{6} = 6$$

Jadi, konsumen surplusnya sebesar 6

(b) Gambar grafik

$Q_d = 5 - \frac{1}{3}P$

P	0	15
Q_d	5	0
(P,Q_d)	(0,5)	(15,0)



Gambar 11.3

Contoh 11 - 12

Fungsi permintaan terhadap sejenis barang adalah, $Q_d = -2P^2 + 32$
P = harga per unit barang, Q_d = kuantitas barang yang diminta
(a) Carilah konsumen surplus pada tingkat harga keseimbangan pasar 3 per unit.
(b) Gambar grafiknya.

Penyelesaian

(a) Bila $P_E = 3 \rightarrow Q_E = \ldots ?$

$P_E = 3 \rightarrow Q_d = -2P^2 + 32$

$Q_E = -2(3)^2 + 32$ (gantikan P dengan $P_E = 3$)

$= -18 + 32$

$= 14$

Maka, $E(P_E, Q_E) = E(3, 14)$

Harga per unit barang tertinggi (P') yang bersedia dibayar oleh konsumen, diperoleh bila $Q_d = 0$ (mendekati nol, dan dianggap nol).

$Q_d = 0 \rightarrow Q_d = -2P^2 + 32$

$0 = -2P^2 + 32$

$P^2 = 16$

$P = \sqrt{16} = \pm 4$

P = 4 (bermakna secara ekonomis)

P = - 4 (tak bermakna secara ekonomis)

Jadi, $P = 4 \approx P' = 4$

Konsumen surplusnya

$$C_S = \int_{P_E}^{P'} f\,(P)dP$$

$$C_S = \int_3^4 (-2P^2 + 32)dP$$

$$= \left[-\frac{2}{3}P^{2+1} + 32P\right]_3^4$$

$$= \left[-\frac{2}{3}P^3 + 32P\right]_3^4$$

$$= \left\{-\frac{2}{3}(4)^3 + 32(4)\right\} - \left\{-\frac{2}{3}(3)^3 + 32(3)\right\}$$

$$= \left\{\frac{-128}{3} + 128\right\} - \left\{\frac{-54}{3} + 96\right\}$$

$$= \left\{\frac{-128 + 384}{3}\right\} - \left\{\frac{-54 + 288}{3}\right\}$$

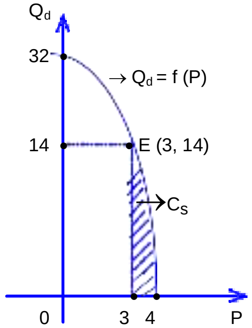
$$= \left\{\frac{256}{3}\right\} - \left\{\frac{234}{3}\right\}$$

$$= \frac{22}{3} = 7{,}33$$

(b) Gambar grafiknya

$Q_d = -2P^2 + 32$

P	0	1	2	3	4
Q_d	32	30	24	14	0
(P, Q_d)	(0, 32)	(1, 30)	(2, 24)	(3, 14)	(4, 0)



Gambar 11.4

Contoh 11 - 13

Fungsi penawaran suatu barang adalah $Q_S = 0{,}5P - 2$

P = harga per unit barang, Q_S = kuantitas barang yang ditawarkan

(a) Tentukanlah produsen surplus pada tingkat harga keseimbangan pasar 8 per unit.

(b) Gambar grafiknya.

Penyelesaian

(a) Bila $P_E = 8 \rightarrow Q_E = \ldots\ ?$

$$P_E = 8 \rightarrow Q_S = 0{,}5P - 2$$
$$Q_E = 0{,}5(8) - 2 \qquad \text{(gantikan P dengan } P_E = 8)$$
$$Q_E = 2$$

Maka, $E(P_E, Q_E) = E(8, 2)$.

Harga per unit barang terendah (P'), yang bersedia dijual oleh produsen, diperoleh bila $Q_S = 0$ (mendekati nol dari atas, dan dianggap nol)

$$Q_S = 0 \rightarrow Q_S = 0{,}5P - 2$$
$$0 = 0{,}5P - 2$$
$$2 = 0{,}5P$$
$$P = 4 \approx P' = 4$$

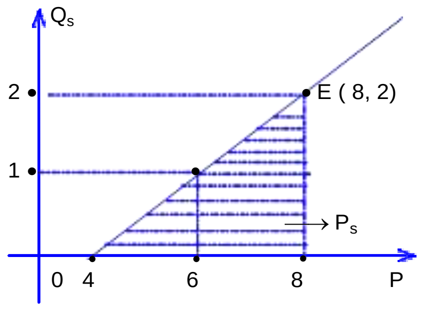
Produsen surplusnya

$$P_S = \int_{P'}^{P_E} f(P)dP$$
$$= \int_4^8 (0{,}5P - 2)dP$$
$$= \left(\frac{1}{4}P^2 - 2P\right)\Big|_4^8$$
$$= \left\{\frac{1}{4}(8)^2 - 2(8)\right\} - \left\{\frac{1}{4}(4)^2 - 2(4)\right\}$$
$$= 4$$

(b) Gambar grafik

$Q_S = 0{,}5P - 2$

P	4	6	8
Q_S	0	1	2
(P, Q_S)	(4, 0)	(6, 1)	(8, 2)



Gambar 11.5

Contoh 11 - 14

Fungsi penawaran suatu barang adalah, $Q_S = 3P^2 - 12$

P = harga per unit barang, Q_S = kuantitas barang yang ditawarkan

(a) Tentukanlah produsen surplus pada tingkat harga keseimbangan P = 4.
(b) Gambar grafiknya

Penyelesaian

(a) Bila $P_E = 4 \rightarrow Q_E = \ldots\ ?$

$P_E = 4 \rightarrow Q_S = 3P^2 - 12$

$Q_E = 3(4)^2 - 12$ (gantikan P dengan $P_E = 4$)

$= 48 - 12$

$= 36$

Maka, $E(P_E, Q_E) = E(4, 36)$

Harga per unit barang terendah (P') yang bersedia dijual oleh produsen, diperoleh bila $Q_S = 0$ (mendekati nol dan dianggap nol)

$Q_S = 0 \rightarrow$ $\quad Q_S = 3P^2 - 12$

$0 = 3P^2 - 12$

$3P^2 = 12$

$P^2 = 4$

$P_1 = 2$ (bermakna secara ekonomis)

$P_2 = -2$ (tak bermakna secara ekonomis)

$P = 2 \approx P' = 2$

Produsen surplusnya

$$P_S = \int_{P'}^{P_E} f(P)dP$$

$$= \int_2^4 (3p^2 - 12)dP$$

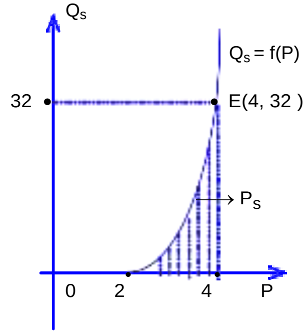
$$= \frac{3}{3}p^3 - 12p\Big]_2^4 = p^3 - 12p\Big]_2^4$$

$= \left\{(4)^3 - 12(4)\right\} - \left\{(2)^3 - 12(2)\right\} \;\; = \left\{16\right\} - \left\{-16\right\}$
$= 16 + 16 = 32$

(b) Gambar grafik

$Q_s = 3p^2 - 12$

P	2	3	4	5
Q_s	0	15	32	63
(P, Q_s)	(2, 0)	3, 15	4, 32	5, 63



Gambar 11.6

Contoh 11 - 15

Fungsi permintaan terhadap suatu barang adalah, $Q_d = P^2 - 45P + 450$
P = harga per unit barang, Q_d = kuantitas barang yang diminta

(a) Tentukanlah konsumen surplusnya pada tingkat harga keseimbangan pasar 10.
(b) Gambar grafiknya.

Penyelesaian

(a) Bila $P_E = 10 \rightarrow \quad Q_E = ... ?$

$P_E = 10 \rightarrow \quad Q_d = P^2 - 45P + 450$
$Q_E = 10^2 - 45(10) + 450$ (gantikan P dengan $P_E = 10$)
$= 100$

Maka, $E(P_E, Q_E) = E(10, 100)$

Harga per unit barang tertinggi (P') yang bersedia dibayar oleh konsumen, diperoleh bila $Q_d = 0$ (mendekati nol, dan dianggap nol).

$Q_d = 0 \rightarrow Q_d = P^2 - 45P + 450$
$0 = P^2 - 45P + 450$
$0 = (P - 30)(P - 15)$

(P - 30) = 0 → P = 30 (tidak memenuhi fungsi permintaan, ingat slope Q_d adalah negatif)
(P - 15) = 0 → P = 15 (memenuhi fungsi permintaan)

maka, P = P' = 15

Konsumen surplus

$$C_s = \int_{P_E}^{P'} f(P)dP$$

$$= \int_{10}^{15} (P^2 - 45P + 450)dP$$

$$= \left[\frac{1}{3}P^3 - \frac{45}{2}P^2 + 450P\right]_{10}^{15}$$

$$= \left\{\frac{1}{3}(15)^3 - \frac{45}{2}(15)^2 + 450(15)\right\} - \left\{\frac{1}{3}(10)^3 - \frac{45}{2}(10)^2 + 450(10)\right\}$$

$$= \{1125 - 5062{,}5 + 6750\} - \{100 - 2250 - + 4500\}$$

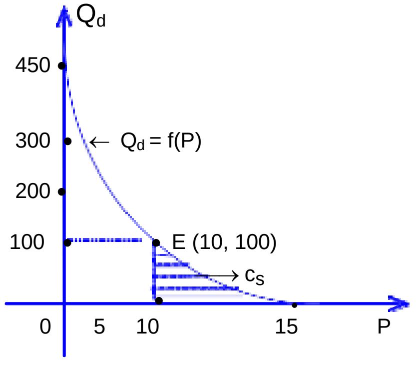
$$= 2812{,}5 - 2350$$

$$= 462{,}5$$

(b) Gambar grafik

$Q_d = P^2 - 45P + 450$

P	0	10	15
Q_d	450	100	0
(P, Q_d)	(0, 450)	(10, 100)	(15, 0)



Gambar 11.7

Contoh 11 – 16
Fungsi permintaan dan penawaran sejenis barang berbentuk:
$Q_d = 9 - P^2$ dan $Q_s = P^2 + 2P - 3$

(a) Hitunglah konsumen surplus dan produsen surplus pada titik keseimbangan pasar.
(b) Gambar grafiknya

Penyelesaian
Syarat Keseimbangan pasar:

$Q_d = Q_s$
$9 - P^2 = P^2 + 2P - 3$
$2P^2 + 2P - 12 = 0$
$P^2 + P - 6 = 0$
$(P + 3)(P - 2) = 0$
$(P + 3) = 0 \rightarrow P = -3$ (tidak memiliki arti ekonomis)
$(P - 2) = 0 \rightarrow P = 2$ (memiliki arti ekonomis)
$P = P_E = 2$

$P_E = 2, \quad Q_E = \ldots ?$
$P_E = 2 \rightarrow Q_d = 9 - P^2$
$Q_E = 9 - 2^2$ (gantikan P dengan $P_E = 2$)
$= 5$

Jadi, titik keseimbangan pasarnya adalah $E(P_E, Q_E) = E(2, 5)$

Konsumen Surplus
Harga per unit barang tertinggi (P') yang bersedia dibayar oleh konsumen, diperoleh bila $Q_d = 0$ (mendekati nol, dan dianggap nol).

$Q_d = 9 - P^2$
$0 = 9 - P^2$
$P^2 = 9$
$P = \sqrt{9} = \pm 3$
$P = 3$ (memiliki arti ekonomis)
$P = -3$ (tidak memiliki arti ekonomis)

Maka, $P = 3 \approx P' = 3$

$$C_s = \int_{P_E}^{P'} f(P)\,dP$$

$$= \int_2^3 (9 - P^2)\,dP$$

$$= \left. 9P - \frac{1}{3}P^3 \right|_2^3$$

$$= \left\{9(3) - \frac{1}{3}(3)^3\right\} - \left\{9(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right\}$$

$$= \{27 - 9\} - \left\{18 - \frac{8}{3}\right\}$$

$$= 18 - \frac{46}{3} = \frac{8}{3}$$

Produsen Surplus
Harga per unit barang terendah (P') yang bersedia dijual oleh produsen, diperoleh bila $Q_S = 0$ (mendekati nol, dan dianggap nol)

$$Q_S = P^2 + 2P - 3$$
$$0 = P^2 + 2P - 3$$
$$(P + 3)(P - 1) = 0$$

$(P + 3) = 0 \rightarrow P = -3$ (tidak memiliki arti ekonomis)
$(P - 1) = 0 \rightarrow P = 1$ (memiliki arti ekonomis)

Maka, P = P' = 1

$$P_S = \int_{P'}^{P_E} f(P)dP$$
$$= \int_{1}^{2} (P^2 + 2P - 3)dP$$
$$= \left[\frac{1}{3}P^3 + P^2 - 3P\right]_1^2$$
$$= \left\{\frac{1}{3}(2)^3 + 2^2 - 3(2)\right\} - \left\{\frac{1}{3}(1)^3 + 1^2 - 3(1)\right\}$$
$$= \left\{\frac{8}{3} + 4 - 6\right\} - \left\{\frac{1}{3} + 1 - 3\right\}$$
$$= \left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

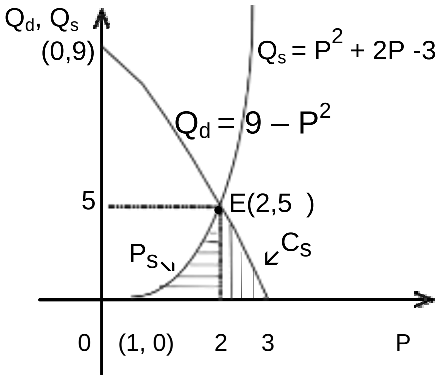
(b) Gambar grafiknya

$Q_d = 9 - P^2$

P	0	3	2
Qd	9	0	5
(P, Q_d)	(0, 9)	(3, 0)	(2, 5)

$Q_S = P^2 + 2P - 3$

P	1	2	3
Q_S	0	5	12
(P, Q_S)	(1, 0)	(2, 5)	(3, 12)



Gambar 11.8

11.3.3 Tambahan Pendapatan dan Pembentukan Modal

Contoh 11 – 17
Fungsi penjualan (penerimaan) marginal perusahaan perdagangan sejenis TV berbentuk:

$$MR = f(Q) = -0{,}08Q + 20$$

Q = kuantitas TV yang terjual (unit), MR = pendapatan marginal (Juta rupiah)
Hitunglah tambahan/kenaikan penjualan total, bila kuantitas TV yang terjual meningkat dari 50 menjadi 100 unit.

Penyelesaian :
R = …? (tambahan penerimaan total/penjualan total**)**

$$R = \int_{50}^{100} (MR)dQ$$

$$= \int_{50}^{100} (-0{,}08Q + 20)dQ$$

$$= \left.\frac{-0{,}08}{2}Q^2 + 20Q\right|_{50}^{100} = \left.-0{,}04Q^2 + 20Q\right]_{50}^{100}$$

$= [\{(-0{,}04\,(100)^2 + 20(100)\} - \{(-0{,}04(50)^2 + 20(50)\}]$
$= [\{-400 + 2.000\} - \{-100 + 1.000\}]$
$= [1.600 - 900]$
$= 700$

Jadi, tambahan penjualan totalnya sebesar Rp 700 juta.

Contoh 11 – 18
Fungsi investasi bersih dinyatakan oleh : $I = f(t) = 400t^{1/4}$
I = investasi (dalam miliar rupiah), t = waktu (dalam tahun).

Tentukanlah:
(a) Pembentukan modal dari akhir tahun pertama hingga akhir tahun kelima.
(b) Waktu yang diperlukan agar modal yang terbentuk Rp 900 miliar.

Penyelesaian
(a) K_t = …? (dari t = 1 sampai dengan t = 5).

$$Kt = \int_1^5 (I)dt = \int_1^5 (400t^{1/4})dt$$

$$= \frac{400}{1+\frac{1}{4}} t^{1+1/4} \Big]_1^5 = 320t^{5/4}\Big]_1^5$$

$= \{(320(5)^{5/4}) - (320(1)^{5/4}\}$

$= 2.392,544 - 320$

$= 2.072,544$

Jadi, pembentukan modal dari akhir tahun pertama hingga akhir tahun kelima sebesar Rp 2.072,544 miliar.

b) K_t = Rp 900 miliar, t = 0 hingga t.
t = …?

$$K_t = \int_0^t (I)dt = \int_0^t (400t^{1/4})dt$$

$$900 = \int_0^t (400t^{1/4})dt$$

$$900 = 320t^{5/4}\Big]_0^t$$

$$900 = \{(320\,t^{5/4}) - (320\,(0)^{5/4})\}$$

$$= 320\,t^{5/4} - 0$$

$$900 = 320\,t^{5/4}$$

$$t^{5/4} = \frac{900}{320}$$

$$t = \left(\frac{900}{320}\right)^{4/5} = 2,287$$

Jadi, agar modal yang terbentuk sebesar Rp 900 miliar, investasi dilakukan selama 2,3 tahun.

Soal-soal Latihan

11 - 1 Biaya marginal ditunjukkan oleh $MC = 108 - 45Q + 3Q^2$
Biaya tetapnya adalah 300
Tentukanlah:
(a) Fungsi biaya totalnya.
(b) Fungsi biaya rata-rata dan fungsi biaya variabel.

11 - 2 Penerimaan marginal ditunjukkan oleh $MR = 200 + 20Q - 15Q^2$
(Q = kuantitas barang)
Tentukanlah :
(a) Fungsi penerimaan total dan fungsi penerimaan rata-ratanya.
(b) Penerimaan total dan harga tiap unit barang bila barang yang terjual sebanyak 4 unit.

11 - 3 Diketahui hasrat marginal untuk konsumsi, MPC = 0,75. Bila pendapatan nol , maka konsumsinya 40.
Tentukanlah :
(a) Fungsi konsumsinya
(b) Besarnya konsumsi bila besarnya pendapatan 100.

11 - 4 Hasrat marginal untuk menabung, MPS = 0,6.
Bila pendapatan nasional 200, terjadi tabungan negatif sebesar 30
Tentukanlah :
(a) Fungsi Tabungan, $S = f(Y)$
(b) Fungsi konsumsi, $C = f(Y)$
(c) Nilai tabungan dan konsumsi masing-masing bila pendapatan nasionalnya 400.

11 - 5 Tingkat Investasi bersih , $I = f(t) = 10\ t^{3/4}$ dan stok kapital pada awal tahun (t = 0) adalah 60.
Tentukanlah :
(a) Fungsi kapitalnya.
(b) Besarnya kapital pada tahun kelima (t = 5).

11 - 6 Biaya marginal untuk memproduksi sejenis barang,

$$MC = 35 - 12Q + Q^2$$

Bila untuk memproduksi 1 unit barang diperlukan biaya 50, tentukanlah:
(a) Fungsi biaya total dan fungsi biaya rata-ratanya.
(b) Biaya total dan biaya rata-rata bila berproduksi sebanyak 2 unit.

11 - 7 Seorang monopolis memiliki fungsi
$MR = f(Q) = 32 - 8Q$
$MC = h(Q) = 2Q - 3$
$FC = 20$

Apabila si monopolis menghendaki keuntungan yang maksimum
(Q = kuantitas output, P = harga per unit output)

(a) Berapa unit sebaiknya berproduksi dan dengan harga berapa tiap unit output seharusnya dijual
(b) Berapa keuntungan yang akan diperoleh si monopolis
(c) Buatlah grafik C, R, MC, MR dalam satu gambar.

11 - 8 Fungsi permintaan terhadap suatu barang berbentuk, $Q_d = 15 - P$. Bila P = harga tiap unit barang dan Q = kuantitas barang yang diminta. Tentukanlah konsumen surplus bila kuantitas keseimbangan pasar 5, dan buatlah grafiknya.

11 - 9 Fungsi permintaan terhadap suatu barang berbentuk $Q_d = 84 - P^2$. Bila P = harga tiap unit barang dan Q = kuantitas barang yang diminta. Tentukanlah konsumen surplus bila tingkat harga keseimbangan pasar 2, dan buatlah grafiknya.

11 - 10 Fungsi penawaran sejenis barang berbentuk $Q_s = 3P^2 - 27$ Tentukanlah produsen surplus, bila tingkat harga keseimbangan pasar 5. Buatlah grafiknya.

11 - 11 Fungsi penawaran terhadap suatu barang berbentuk

$$Q_s = 3P^2 - 3P - 2$$

Tentukanlah produsen surplus, bila kuantitas keseimbangan pasar 3. Buatlah grafiknya.

11 - 12 Tentukanlah konsumen surplus dan produsen surplus pada tingkat keseimbangan pasar, bagi sejenis barang yang memiliki fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebagai berikut:

Fungsi permintaan	Fungsi penawaran
(a) $Q_d = \sqrt{45 - P}$	$Qs = 0{,}5P - 3$
(b) $Q_d = -0{,}2P + 16$	$Qs = 0{,}5P - 5$
(c) $Q_d = 18 - P - P^2$	$Q_s = -6 - 2P + 2P^2$.

11 - 13 Bila fungsi permintaan sejenis barang berbentuk, $Q_d = 18 - 2P^2$ Tentukanlah konsumen surplus, bila

(a) Kuantitas keseimbangan pasar adalah 2.
(b) Harga per unit barang pada keseimbangan pasar adalah 1.

11 - 14 Dalam kondisi persaingan sempurna, kuantitas barang yang diminta pada harga-harga yang berlaku ditentukan oleh fungsi permintaan dan penawaran masing- masing sebagai berikut ,

$$Q_d = 10 - P - P^2 \text{ dan } Q_s = 3P^2 - 3P - 2$$

Tentukanlah konsumen surplus dan produsen surplus pada titik keseimbangan pasar.

11 - 15 Seorang produsen mempunyai fungsi penawaran, $Q_s = 2P - 10$. Bila P = harga per unit barang dan Q_s = kuantitas barang yang ditawarkan.Tentukanlah produsen surplus pada titik keseimbangan pasar E(7, 4)

11 - 16 Penerimaan/penjualan marginal sebuah perusahaan perdagangan ditunjukkan oleh MR = - 2Q + 20. Bila kuantitas barang yang terjual mengalami kenaikan dari 5 unit menjadi 8 unit. Tentukanlah kenaikan penjualan yang diperoleh. Q = kuantitas barang.

11 - 17 Marginal profit dari penjualan sejenis barang ditunjukkan oleh fungsi:

$$MP = -5Q + 200.$$

Q = kuantitas barang yang terjual dan MP = marginal profit (dalam ribu rupiah). Bila barang yang terjual sebanyak 100 unit, profitnya setengah juta rupiah. Tentukanlah fungsi profitnya.

11 - 18 Fungsi penjualan (penerimaan) marginal produk sebuah perusahaan berbentuk:

$$MR = f(Q) = -0{,}02Q + 5$$

Q = kuantitas barang yang terjual (unit), MR = pendapatan marginal (miliar rupiah)
Hitunglah tambahan penjualan total (penerimaan total), bila kuantitas barang yang terjual meningkat dari 100 menjadi 150 unit.

11 - 19 Fungsi investasi bersih dinyatakan oleh : $I = f(t) = 350t^{2/5}$
I = investasi (dalam miliar rupiah), t = waktu (dalam tahun)
Tentukanlah:
(a) Pembentukan modal dari akhir tahun pertama hingga akhir tahun keenam.
(b) Waktu yang diperlukan agar modal yang terbentuk Rp 700 miliar.

TURUNAN FUNGSI MULTIVARIABEL DAN APLIKASINYA DALAM EKONOMI DAN BISNIS

12.1 Pengantar

Dalam Bab 8, telah dibahas turunan suatu fungsi dengan satu variabel bebas (fungsi univariabel) dengan bentuk eksplisit y = f(x) atau dalam bentuk implisit f(x, y) = 0. Dalam bab ini akan dibahas turunan suatu fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas, yang fungsinya disebut fungsi multivariabel/multivariat. Di antara variabel-variabel bebas tersebut, variabel yang satu dapat mempengaruhi variabel bebas lainnya atau tidak. Fungsi dengan dua atau lebih variabel bebas ini, penerapannya banyak dijumpai dalam ekonomi dan bisnis.

Dalam bab ini akan dibahas terbatas pada turunan parsial dan penerapannya dalam ekonomi dan bisnis, yaitu biaya marginal, permintaan marginal dan elastisitas parsial. Aplikasi fungsi multivariable/multivariat lainnya yang lebih luas dibahas dalam Buku Matematika Ekonomi Lanjutan. Tujuan dari bab ini. Setelah mempelajari bab ini peserta didik (mahasiswa) diharapkan dapat memahami dengan baik tentang turunan fungsi multivariabel khususnya turunan parsial dan menerapkannya dalam ekonomi-bisnis.

12.2 Turunan Parsial

Pada dasarnya cara mendapatkan turunan parsial sama dengan turunan biasa. Kalau turunan biasa berkaitan dengan suatu fungsi hanya dengan satu variabel bebas (fungsi univariabel), sedangkan turunan parsial berkaitan dengan suatu fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas (fungsi multivariabel). Suatu fungsi multivariabel dapat diturunkan terhadap salah satu variabel bebasnya dengan menganggap (memperlakukan) semua variabel bebas lainnya sebagai konstanta.

Untuk menyatakan turunan parsial dipakai simbol ∂ , yang merupakan variasi dari huruf yunani δ (baca: delta) seperti $\frac{\partial z}{\partial x}$ (turunan parsial z terhadap x), $\frac{\partial z}{\partial y}$ (turunan parsial z terhadap y). Sedangkan untuk menyatakan turunan biasa dipakai simbol d, seperti $\frac{dy}{dx}$ (turunan y terhadap x), $\frac{dz}{dx}$ (turunan z terhadap y).

Contoh 12- 1

Untuk fungsi multivariabel z = f(x, y)

Turunan parsial pertama z berkenaan/terhadap x dapat ditulis

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

Turunan parsial pertama z berkenaan /terhadap y dapat ditulis

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

Turunan parsial kedua z berkenaan/terhadap x dapat ditulis

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Turunan parsial kedua z berkenaan / terhadap y dapat ditulis

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Turunan parsial silang z terhadap x dan terhadap y atau turunan parsial kedua z mula - mula terhadap x kemudian terhadap y dapat ditulis.

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x.\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Turunan parsial silang z terhadap y dan terhadap x atau turunan parsial kedua z mula - mula terhadap y kemudian terhadap x dapat ditulis.

$$z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y.\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

Turunan parsial yang lebih tinggi dapat diperoleh lagi bila turunan parsial sebelumnya memungkinkan untuk diturunkan kembali.

Contoh 12- 2
Tentukanlah turunan parsial (pertama) dari
(a) $z = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$
(b) $z = f(x, y) = 2x^3 + xy + y^2$

Penyelesaian

(a) $z = 3x_1 + 2x_2$

$z_{x_1} = \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = 3$ Turunan parsial pertama z terhadap x_1 dengan x_2 dianggap konstanta

$z_{x_2} = \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = 2$ Turunan parsial pertama z terhadap x_2 dengan x_1 dianggap konstanta

(b) $z = 2x^3 + xy + y^2$

$z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x + y$ Turunan parsial pertama z terhadap x dengan y dianggap konstanta

$z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y$ Turunan parsial pertama z terhadap y dengan x dianggap konstanta

Contoh 12- 3
Diketahui fungsi $z = x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^3$
Hitunglah

(a) $z_{x_1} = \ ...?$ (d) $z_{x_2x_2} = \ ...?$

(b) $z_{x_2} = \ ...?$ (e) $z_{x_1x_2} = \ ...?$

(c) $z_{x_1x_1} = \ ...?$ (f) $z_{x_2x_1} = \ ...?$

Penyelesaian

(a) $z_{x_1} = 2x_1 + 5x_2$ (d) $z_{x_2x_2} = 12x_2$

(b) $z_{x_2} = 2x_1 - 6x_2^2$ (e) $z_{x_1x_2} = 5$

(c) $z_{x_1x_1} = 2$ (f) $z_{x_2x_1} = 5$

Contoh 12- 4
Tentukanlah nilai Z_x, Z_{xx} dan Z_{xy} pada x = 1 dan y = 2 dari fungsi
$Z = x^2 + xy^2 + 5$.

Penyelesaian

$Z_x = 2x + y^2$
$= 2(1) + (2)^2$ (pada x = 1 dan y = 2)
$= 6$

$Z_{xx} = 2$
$= 2$ (pada x = 1 dan y = 2)

$Z_{xy} = 2y$
$= 2(2)$ (pada x = 1 dan y = 2)
$= 4$

Contoh 12- 5
Di bawah ini adalah model regresi linear berganda (populasi).
Tentukanlah turunan parsialnya dan berikan interpretasi.

(a) $Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \mu$
(b) $Y = 20 + 0,5\,X_1 - 0,1X_2 + 0,7X_3 + \mu$

Penyelesaian
(a) $Y = \beta_0 + \beta_1X_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \mu$

$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = \beta 1$ artinya bila X_1 naik satu unit maka Y akan naik $\beta_1$unit dan sebaliknya bila X_1 turun satu unit maka Y akan turun $\beta_1$unit, jika X_2 dan X_3 konstan.

$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = \beta_2$, artinya bila X_2 naik satu unit maka Y akan naik β_2 unit dan sebaliknya bila X_2 turun satu unit maka Y akan turun β_2 unit, jika X_1 dan X_3 konstan.

$\frac{\partial Y}{\partial X_3} = \beta_{3,}$ artinya bila X_3 naik satu unit maka Y akan naik β_3 unit dan sebaliknya bila X_3 turun satu unit maka Y akan turun β_3 unit, jika X_1 dan X_2 konstan.

(b) $Y = 20 + 0,5\,X_1 - 0,1X_2 + 0,7X_3 + \mu$

$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = 0,5$ (**positif 0,5**) artinya bila X_1 **naik** satu unit maka Y akan **naik** 0,5 unit dan sebaliknya bila X_1 **turun** satu unit maka Y akan **turun** 0,5 unit, jika X_2 dan X_3 konstan.

$\frac{\partial Y}{\partial X_2}$ = - 0,2 (minus 2) artinya bila X_2 naik satu unit maka Y akan turun 0,2 unit dan sebaliknya bila X_2 turun satu unit maka Y akan naik 0,2 unit, jika X_1 dan X_3 konstan.

$\frac{\partial Y}{\partial X_3}$ = 0,7, artinya bila X_3 naik satu unit maka Y akan naik 0,7 unit dan sebaliknya bila X_3 turun satu unit maka Y akan turun 0,7 unit, jika X_1 dan X_2 konstan.

12.3 Aplikasi Turunan Parsial dalam Ekonomi dan Bisnis

Pada bagian ini akan dibahas aplikasi turunan parsial dalam ekonomi dan bisnis yang terbatas yaitu mengenai biaya marginal, permintaan marginal, elastisitas permintaan parsial dan elastisitas permintaan silang.

12.3.1 Biaya Marginal (*Marginal Cost*)

Bila biaya patungan (bersama) untuk memproduksi dua jenis barang dinyatakan oleh

$$C = f(Q_1, Q_2)$$

C adalah biaya patungan, Q_1 dan Q_2 masing-masing menyatakan kuantitas barang pertama dan kedua. Maka turunan parsial dari C terhadap Q_1 dan Q_2 disebut biaya marginal,

$\frac{\partial C}{\partial Q_1} = C_{Q_1}$ adalah biaya marginal berkenaan dengan Q_1

$\frac{\partial C}{\partial Q_2} = C_{Q_2}$ adalah biaya marginal berkenaan dengan Q_2

Umumnya biaya marginal adalah positif.

Contoh 12- 6

Fungsi biaya patungan untuk memproduksi dua jenis barang dinyatakan oleh:

$$C = f(Q_1, Q_2) = 5 + 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2$$

C = biaya patungan, Q_1 = kuantitas barang pertama dan Q_2 = kualitas barang kedua

Tentukanlah:

(a) Fungsi biaya marginal berkenaan dengan Q_1.
(b) Fungsi biaya marginal berkenaan dengan Q_2.
(c) Biaya marginal berkenaan dengan Q_1, pada Q_1 = 4 dan Q_2 = 5 dan berikan interpretasi.

(d) Biaya marginal berkenaan dengan Q_2, pada $Q_1 = 10$ dan $Q_2 = 5$, dan berikan interpretasi.

Penyelesaian

$$C = f(Q_1, Q_2) = 5 + 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 4Q_2^2$$

(a) Fungsi biaya marginal berkenaan dengan Q_1.

$$C_{Q_1} = 6Q_1 + Q_2$$

(b) Fungsi biaya marginal berkenaan dengan Q_2

$$C_{Q_2} = Q_1 + 8Q_2$$

(c) Biaya marginal berkenaan dengan Q_1, pada $Q_1 = 4$ dan $Q_2 = 5$

$$\begin{aligned} C_{Q_1} &= 6Q_1 + Q_2 \\ &= 6(4) + 5 \qquad \text{(pada } Q_1 = 4 \text{ dan } Q_2 = 5) \\ &= 29 \end{aligned}$$

Interpretasi. $C_{Q_1} = 29$, artinya bila produksi barang pertama dinaikkan satu unit (dari 4 unit menjadi 5 unit) sementara produksi barang ke dua dipertahankan (tetap) sebanyak 5 unit, maka biaya produksi akan bertambah (meningkat) sebesar 29.

(d) Biaya marginal berkenaan dengan Q_2, pada $Q_1 = 4$ dan $Q_2 = 5$

$$\begin{aligned} C_{Q_2} &= Q_1 + 8Q_2 \\ &= 10 + 8(5) \qquad \text{(pada } Q_1 = 10 \text{ dan } Q_2 = 5) \\ &= 50 \end{aligned}$$

Interpretasi. $C_{Q_2} = 50$, artinya bila produksi barang kedua dinaikkan satu unit (dari 5 unit menjadi 6 unit) sementara produksi barang pertama dipertahankan (tetap) sebanyak 10 unit, maka biaya produksi akan bertambah (meningkat) sebesar 50.

12.3.2 Permintaan Marginal (*Marginal Demand*)

Apabila fungsi permintaan dua jenis barang (komoditi) yang berhubungan dinyatakan sebagai,

$$Q_1 = f(P_1, P_2) \text{ dan } Q_2 = g(P_1, P_2)$$

Q_1 menyatakan kuantitas barang pertama dan Q_2 menyatakan kuantitas barang kedua yang diminta, P_1 dan P_2 masing-masing menyatakan harga per unit barang pertama dan kedua. Turunan parsial dari Q_1 dan Q_2 terhadap P_1 dan P_2 berturut - turut disebut ***permintaan marginal.***

Dari fungsi $Q_1 = f(P_1, P_2)$ dapat diturunkan

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = \text{permintaan marginal barang pertama terhadap } P_1$$

$\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ = permintaan marginal barang pertama terhadap P_2

Dari fungsi $Q_2 = g(P_1, P_2)$ dapat diturunkan

$\frac{\partial Q_2}{\partial P_2}$ = permintaan marginal barang ke dua terhadap P_2

$\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$ = permintaan marginal barang kedua terhadap P_1

Sesuai dengan hukum permintaan, umumnya Q_1 akan bertambah bila P_1 turun dan Q_2 akan bertambah bila P_2 turun, dengan demikian $\frac{\partial Q_1}{\partial P_1}$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_2}$ negatif, untuk harga-harga P_1 dan P_2 yang mempunyai arti ekonomis ($P_1, P_2 \geq 0$)

■ **Sifat Hubungan Kedua Jenis Barang**

Untuk mengetahui sifat hubungan antara kedua jenis barang, dilihat dari tanda $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$ (Drafer dan Klingman, 1967; Weber, 1982; Haeussler, *et al.*, 2011) sebagai berikut:

(1) Jika $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$ keduanya negatif untuk (P_1, P_2) tertentu, maka sifat hubungan kedua jenis barang dinamakan ***komplementer.*** Sebab penurunan harga salah satu barang mengakibatkan (kuantitas) permintaan kedua jenis barang akan naik. Contohnya hubungan antara kendaraan bermotor dengan bahan bakar minyak (premium/ pertamax). Hubungan antara kopi dan gula pasir. Dalam bidang bangunan misalnya hubunga antara semen dan pasir.

(2) Jika $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$ keduanya positif untuk (P_1, P_2) tertentu, maka sifat hubungan kedua jenis barang dinamakan ***kompetitif.*** Sebab penurunan harga salah satu barang mengakibatkan (kuantitas) permintaan salah satu barang akan naik dan permintaan barang lainnya turun. Contohnya hubungan antara daging sapi dan daging ayam, beras dan jagung, tiket pesawat dan tiket bus.

(3) Jika $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1}$, mempunyai tanda berlawanan untuk (P_1, P_2) tertentu, maka sifat hubungan kedua jenis barang tersebut, bukan

komplementer dan bukan juga kompetitif atau hubungan yang bersifat netral/independen. Perubahan harga salah satu barang tidak mempengaruhi (kuantitas) permintaan barang yang lainnya. Contohnya hubungan antara ponsel dan beras, tiket pesawat dan sepeda motor, daging ayam dan tiket bioskop.

Contoh 12- 7

Fungsi permintaan dua jenis barang yang memiliki hubungan dinyatakan sebagai,

$$Q_1 = 20 - 2P_1 - P_2 \text{ dan } Q_2 = 9 - 3P_1 - 5P_2$$

Q_1 menyatakan kuantitas barang pertama, Q_2 menyatakan kuantitas barang kedua, P_1 menyatakan harga per unit barang pertama, P_2 menyatakan harga per unit barang kedua.

Tentukanlah:

(a) Keempat permintaan marginalnya dan berikan interpretasi.

(b) Sifat hubungan antara kedua jenis barang tersebut.

Penyelesaian

(a) Dari $Q_1 = 20 - 2P_1 - P_2$ didapat,

$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = -2$, artinya bila harga per unit barang pertama naik satu unit maka kuantitasnya yang diminta turun 2 unit, bila harga per unit barang kedua tetap.

$\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = -1$, artinya bila harga per unit barang kedua naik satu unit maka kuantitas barang pertama yang diminta turun 1 unit, bila harga per unit barang pertama tetap.

Dari $Q_2 = 9 - 3P_1 - 5P_2$, didapat

$\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = -3$, artinya bila harga per unit barang pertama naik satu unit maka kuantitas barang kedua yang diminta turun 3 unit, bila harga per unit barang kedua tetap

$\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} = -5$ artinya bila harga per unit barang kedua naik satu unit maka kuantitasnya yang diminta turun 5 unit, bila harga per unit barang pertama tetap

(b) Oleh karena $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = -1 < 0$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = -3 < 0$, maka sifat hubungan kedua barang adalah komplementer.

Contoh 12-8
Fungsi permintaan dua jenis barang yaitu barang pertama dan kedua yang berhubungan dinyatakan oleh

$$Q_1 = f(P_1, P_2) = 15 - 2P_1 + P_2 \text{ dan } Q_2 = g(P_1, P_2) = 16 + 3P_1 - P_2$$

Q_1 dan Q_2 masing-masing menyatakan kuantitas barang pertama dan kedua, P_1 dan P_2 masing-masing menyatakan harga per unit barang pertama dan kedua.

Tentukanlah
(a) Keempat permintaan marginalnya.
(b) Sifat hubungan kedua jenis barang.

Penyelesaian
(a) Keempat permintaan marginalnya.

Dari fungsi $Q_1 = f(P_1, P_2) = 15 - 2P_1 + P_2$ didapat

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = -2 \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 1$$

Dari fungsi $Q_2 = g(P_1, P_2) = 16 + 3P_1 - P_2$ didapat

$$\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} = -1 \qquad \frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = 3$$

(b) Oleh karena $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 1 > 0$ dan $\frac{\partial Q_2}{\partial P_1} = 3 > 0$, maka sifat hubungan kedua barang tersebut (barang pertama dan kedua) adalah kompetitif.

12.3.3 Elastisitas Parsial

Dalam Bab 9, telah dipelajari elastisitas dari fungsi univariabel y = f(x), antara lain elastisitas permintaan dan penawaran terhadap harga. Pada bagian ini akan dibahas elastisitas fungsi multivariabel, yang secara umum disebut elastisitas parsial. Ada tiga elastisitas yang penting akan dibahas dalam bagian ini yaitu: (1) *elastisitas permintaan terhadap harga*, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang akibat pengaruh perubahan harga barang itu sendiri, (2) *elastisitas permintaan terhadap pendapatan*, yaitu elastisitas yang mengukur perubahan permintaan suatu barang akibat pengaruh perubahan pendapatan konsumen, dan (3) *elastisitas silang-permintaan*, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang akibat pengaruh perubahan harga barang yang lain.

Jika fungsi permintaan terhadap suatu barang dinyatakan dalam bentuk fungsi multivariabel/multivariat,

$$Q_1 = f(P_1, P_2, Y) \tag{12.1}$$

Q_1 menyatakan kuantitas barang pertama yang diminta , P_1 menyatakan harga per unit barang pertama, P_2 menyatakan harga per unit barang yang kedua (barang yang lain), yaitu barang yang penggunaannya berhubungan dengan barang pertama, dan Y menyatakan penghasilan atau pendapatan konsumen.

Maka ketiga elastisitas yang berupa respon variabel terikat terhadap perubahan variabel bebasnya (harga barang itu sendiri, harga barang lainnya dan pendapatan konsumen) secara berurutan dapat dirumuskan sebagai berikut:

■ **Elastisitas Permintaan** (Elastisitas permintaan terhadap harga)

$$\eta_{d1} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1} \tag{12.2}$$

■ **Elastisitas Pendapatan** (Elastisitas perminaan terhadap pendapatan)

$$\eta_y = \frac{\partial Q_1}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q_1} \tag{12.3}$$

■ Elastisitas Silang

$$\eta_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_1} \tag{12.4}$$

■ **Sifat Hubungan Kedua Jenis Barang**

Untuk dapat mengetahui sifat hubungan kedua jenis barang, dapat dilihat dari nilai elastisitas silangnya, dan pemintaan marginal terhadap harga barang yang ditinjau sebagai berikut.

(1) Bila nilai η_{12} dan $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ negatif, maka sifat hubungan kedua barang saling melengkapi/komplementer.

(2) Bila nilai η_{12} dan $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ positif, maka sifat hubungan kedua barang kompetitif/substitutif.

(3) Bila $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2}$ = 0, maka kedua jenis barang tidak ada hubungan atau bersifat independen/netral.

Contoh 12-9
Permintaan terhadap daging ayam ditunjukkan oleh fungsi berikut:

$$Q_1 = 2.500 - 5P_1 + 3P_2 + 0{,}2Y$$

Q_1 = kuantitas daging ayam yang diminta, P_1 = harga per kg daging ayam, P_2 = harga per kg daging sapi, dan Y = pendapatan/penghasilan konsumen. Pada Y = 7000, P_1= 100 dan P_2 = 200.
Hitunglah:
(a) Elastisitas permintaannya dan berikan interpretasi.
(b) Elastisitas pendapatannya dan berikan interpretasi.
(c) Ealastisitas silangnya, berikan interpretasi.
(d) Tentukanlah sifat hubungan daging ayam dan daging sapi.

Penyelesaian
(a) Elastisitas permintaannya
Dihitung terlebih dahulu Q_1 pada Y = 7.000, P_1 = 100 dan P_2 = 200 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2.500 - 5P_1 + 3P_2 + 0{,}2Y \\ Q_1 &= 2.500 - 5(100) + 3(200) + 0{,}2(7.000) \\ &= 2.500 - 500 + 600 + 1400 \\ &= 4.000 \end{aligned}$$

Selanjutnya dari fungsi permintaannya dicari turunan parsial Q_1 terhadap P_1, sebagai berikut.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = -5$$

Selanjutnya per rumus (12.2) dihitung elastisitas permintaannya dan didapat,

$$\eta_{d1} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_1}$$

$$= (-5) \cdot \frac{100}{4.000} = -0{,}125$$

Interpretasi : η_{d1} = - 0,125 artinya bila harga per kg daging ayam naik 1%, maka kuantitas daging ayam yang diminta oleh konsumen turun 0,125%, apabila (dengan asumsi) harga per kg daging sapi (P_2) dan pendapatan konsumen (Y) tetap

(b) Elastisitas pendapatan
Y = 7.000, dan dari jawaban butir (a) telah didapat Q_1 = 4.000.

Selanjutnya dari fungsi permintaannya dicari turunan parsial Q_1 terhadap Y, sebagai berikut.

$Q_1 = 2.500 - 5P_1 + 3P_2 + 0{,}2Y$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial Y} = 0{,}2$$

Per rumus (12.3) elastisitas pendapatan dapat dihitung, dan didapat,

$$\eta_y = \frac{\partial Q_1}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q_1}$$

$$\eta_y = 0{,}2\left(\frac{7000}{4000}\right)$$

$$= 0{,}35$$

Interpretasi: $\eta_y = 0{,}35$, memiliki arti bahwa bila pendapatan konsumen naik 1%, maka jumlah daging sapi yang diminta naik 0,35%, apabila (dengan asumsi) harga per kg daging ayam (P_1) dan harga per kg daging sapi (P_2) tetap.

(c) Elastisitas silang

$P_2 = 200$, dan dari jawaban butir (a) telah didapat $Q_1 = 4.000$

Selanjutnya dari fungsi permintaannya dicari turunan parsial Q_1 terhadap P_2, sebagai berikut.

$Q_1 = 2.500 - 5P_1 + 3P_2 + 0{,}2Y$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 3$$

Per rumus (12.4) elastis silangnya dapat dihitung, dan didapat,

$$\eta_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_1}$$

$$= 3\left(\frac{200}{4000}\right)$$

$$= 1{,}5$$

Interpretasi: $\eta_{12} = 1{,}5$, memiliki arti bahwa bila harga per kg daging sapi naik 1%, maka kuantitas daging ayam yang diminta naik 1,5%, apabila harga per kg daging ayam dan penghasilan konsumen tetap.

(d) Sifat hubungan kedua jenis barang

Oleh karena $\eta_{12} = 1{,}5 > 0$, dan $\frac{\partial Q_1}{\partial P_2} = 3 > 0$, maka sifat hubungan daging ayam dan daging sapi adalah kompetitif/substitutif.

Soal-soal Latihan

12 - 1 Carilah z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy} dan z_{yx} fungsi- fungsi di bawah ini :

(a) $z = 2x^2 + 3xy + 5y^2$
(b) $z = x^2 + 2xy + y^2 + 8$
(c) $z = x^3 + 5xy - y^2$
(d) $z = 3x^2 + x^2y – 5y^2$

12 - 2 Carilah turunan parsial pertama dan turunan parsial kedua dari fungsi-fungsi di bawah ini:

(a) $z = f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 - 4xy^2$
(b) $u = f(x, y, z) = 3z^2 + 2xyz + 3xy^2 + y^4$
(c) $u = f(x, y, z) = x^2 – 3xy – 3xz + 2y^3$

12- 3 Fungsi biaya patungan untuk memproduksi barang A dan B adalah :

$$C = f(Q_A, Q_B) = 10 + 3Q_A^2 + Q_AQ_B + 7Q_B^2$$

C = biaya patungan, Q_A = kuantitas barang A, Q_B = kuantitas barang B.
(a) Tentukanlah biaya marginal terhadap Q_A dan terhadap Q_B.
(b) Pada $Q_A = 2$, dan $Q_B = 5$, tentukanlah kedua biaya marginalnya, dan berikan interpretasi.

12- 4 Fungsi permintaan dari dua jenis barang yaitu barang X dan Y yang memiliki hubungan dinyatakan oleh pasangan fungsi-fungsi berikut:

(a) $Q_x = 15 – 2P_x + P_y$ dan $Q_y = 16 + P_x - P_y$
(b) $Q_x = 5 - 2P_x + P_y$ dan $Q_y = 8 - 2P_x - 3P_y$
(c) $Q_x = 30 – 3P_x - 2P_y$ dan $y = 18 - P_x - P_y$

Q_x dan Q_y masing-masing menyatakan kuantitas barang X dan barang Y. P_x dan P_y masing-masing menyatakan harga per unit barang X barang Y.
Tentukanlah:
(1) Keempat permintaan marginal bagi fungsi-fungsi permintaan di atas dan berikan interpretasi.
(2) Sifat hubungan antara barang X dan Y .

12-5 Fungsi permintaan terhadap sejenis barang ditentukan oleh persamaan

$$Q_d = 700 – 2P_d + 0,1Y$$

Q_d menyatakan kuantitas barang yang diminta, P_d harga per unit barang dan Y pendapatan konsumen. Pada $P_d = 75$, dan Y = 500.

(a) Hitunglah elastisitas permintaannya dan berikan interpretasi.
(b) Hitunglah elastisitas pendapatannya dan berikan interpretasi

12-6 Permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh fungsi permintaan berikut:

$$Q_1 = 4500 - 2P_1 + 2{,}5\,P_2 + 0{,}2Y$$

Q_1 = kuatitas barang pertama yang diminta, P_1 = harga per unit barang pertama, P_2 = harga per unit barang kedua dan Y = pendapatan konsumen. Pada Y = 2.500, P_1 = 50 dan P_2 = 2500,

(a) Hitunglah elastisitas permintaannya dan berikan interpretasi.
(b) Hitunglah elastisitas pendapatannya dan berikan interpretasi.
(c) Hitunglah elastisitas silangnya dan berikan interpretasi.
(d) Tentukan sifat hubungan barang pertama dan kedua (kompetitif/ substitutif atau komplementer).

DAFTAR PUSTAKA

Black, J., dan Bradley. Essential Mathematics for Economists. Ed. ke-2. New York : John Wiley & Sons, 1993.

Braddley, T. *Essential Mathematics for Economics, Business, and Management*. Ed. ke- 4, New York : John Wiley & Sons, 2013.

Budnick, S. Frank . *Applied Mathematics for Business, Economics, and The Social Sciences*. Ed. ke-4, Singapore : Mc Graw-Hill, 1993.

Chiang, C. Alpha dan Kevin Wainwright. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Ed. ke-4, New York : Mc Graw-Hill, 2005.

Dowling, Edward T. Introduction to *Mathematical for Economists*. Ed. ke-2. Singapore : McGraw-Hill, 1992.

_______________ *Mathematical Methods for Business and Economics*. Ed. ke-1. Singapore : MC Grwa-Hill, 2009

Draper, Jean E., dan Jane S. Klingman. *Mathematical Analysis, Business and Economics Applications*. New York : Harper & Row, Publishers, 1967.

Haeussler, Ricard S. Paul dan Ricard J. *Wood*. *Introductory Mathematical Analisys for Bussines, Economics and the Life s and the Social Sciences.* Ed. Ke-13. London: Pearson Education, Inc., 2011.

Hoffmann dan Bradley. *Applied Calculus for Business, Economics, and the Social and Life Sciences*. Ed. ke-7. New York : Mc Graw - Hill, 2010.

Hoi, Michel., *et al. Mathematics for Economics*. Edisi ke-3. Massachusetts : The MIT Press, 2011.

Jacoues, Ian. *Mathematics for Economics and Business*. Ed. ke-5. Harlow : Prentice Hall, 2006.

Nicholson, Walter. *Intermediate Microecomics*, *and Its Application*. Ed. ke-9, New York : Harcourt, Inc, , 2000.

O' Sullivan, Sheffrin dan Perez. Economics : *Principles, Applications, and Tools.* Ed. Internasional. Boston : Pearson Education, Inc., 2012.

Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale. *Calculus With Analytic Geometry*. Ed ke-4, New York : Prentice-Hall, 1984.

Schofield, Norman. *Mathematical Methods in Economics and Social Choice*. New York : Sprinnger, 2004.

Tan, Soo T. *Applied Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences*. Ed. ke-5. Belmont : Brooks/Cole, 2010.

Taylor, R., dan Simon Hawkins. *Mathematics for Economics and Business*. New York : Mc Graw-Hill, 2008.

Weber, Jean E. *Mathematical Analysis, Business and Economics Applications*. Ed. ke-4 . New York: Harper & Row Publishers, 1982.

Zehna, P.W. *Sets With Applications.* Buston : Allyn and Bacon, Inc, 1966.

ABJAD YUNANI

Huruf Kecil	Huruf Besar	Nama
α	Α	Alpha
β	Β	Beta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ε	Ε	Epsilon
ζ	Ζ	Zeta
η	Η	Eta
θ	Θ	Theta
ι	Ι	Iota
κ	Κ	Kappa
λ	Λ	Lambda
μ	Μ	Mu
ν	Ν	Nu
ξ	Ξ	Xi
ο	Ο	Omicron
π	Π	Pi
ρ	Ρ	Rho
σ	Σ	Sigma
τ	Τ	Tau
υ	ϒ	Upsilon
ϕ	Φ	Phi
χ	Χ	Chi
ψ	Ψ	Psi
ω	Ω	Omega

Sesungguhnya pengetahuan itu luas tanpa batas, tak bertepi,
tak berujung dan tak terukur.
Kemampuan dan pengetahuan kita sangatlah terbatas,
bak sebutir debu dalam padang pasir nan luas.

(Nata Wirawan, 2001)
(Nata Wirawan, 2001)

p

Sesungguhnya apa pun itu, materi, pengetahuan
atau ilmu yang berlebihan
merupakan pupuk perangsang bagi pertumbuhan
kesombongan, kecongkakan dan keegoisan.

(Nata Wirawan, 2010)
(Nata Wirawan, 2010)